CIENCIA *ergo-sum*
Universidad Autónoma del Estado de México
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
E-ISSN: 2395-8782

Control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$

García-Alvarado, Miguel Ángel; Rodríguez-Jimenes, Guadalupe del Carmen; Ruiz-López, Irving Israel; Carrillo-Ahumada, Jesús
Control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$
CIENCIA *ergo-sum*, vol. 31, 2024 | **e231**
Ciencias Exactas y Aplicadas
Universidad Autónoma del Estado de México, México

García-Alvarado, M. Á., Rodríguez-Jimenes, G. del C., Ruiz-López, I. I., Carrillo-Ahumada, J. (2024). Control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$. CIENCIA *ergo-sum*, *31*. http://doi.org/10.30878/ces.v31n0a16

Control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$

$\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ Control

*Miguel Ángel García-Alvarado**
Tecnológico Nacional de México Campus Veracruz, México
miguel.ga@veracruz.tecnm.mx
http://orcid.org/0000-0002-4921-411X

Guadalupe del Carmen Rodríguez-Jimenes
Tecnológico Nacional de México Campus Veracruz, México
guadalupe.rj@veracruz.tecnm.mx
http://orcid.org/0000-0003-3500-2957

Irving Israel Ruiz-López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
irving.ruiz@correo.buap.mx
http://orcid.org/0000-0002-6592-6838

Jesús Carrillo-Ahumada
Universidad del Papaloapan, México
jesuscarrillo18@yahoo.com
http://orcid.org/0000-0003-2156-0157

Recepción: 23 de mayo de 2022
Aprobación: 26 de octubre de 2022

Resumen

Se presenta la concepción formal del control geométrico paramétrico en $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$, su interpretación en lenguaje natural, sus aplicaciones actuales y su análisis prospectivo. Con base en lo anterior, el objetivo del artículo es hacer extensivo el conocimiento del control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ a la comunidad académica de México y de habla hispana, comentar su principio de parsimonia (generar respuestas de control óptimo con un mínimo de acción de control) y plantear perspectivas de futuras aplicaciones como por ejemplo en la ingeniería biomédica.

Palabras clave: control óptimo, control robusto, control geométrico, ingeniería química, ingeniería bioquímica, ingeniería biomédica.

Abstract

The formal conception of $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ parametric geometric control is presented. The translation to natural language, current applications and its prospective analysis are described. The main purpose of the paper is to extend the knowledge of the $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ control fundamentals among the Spanish-speaking Latin American academic community, to comment on its parsimony principle (the capacity of the production of optimal control signals with minimum control actions) and to give an overview of future applications such as the control of mechanical ventilators and other biomedical engineering devices.

Keywords: optimal control, robust control, geometric control, chemical engineering, biochemical engineering; biomedical engineering.

Introducción

La teoría de control es el estudio de las propiedades matemáticas de los sistemas de control automático, los cuales son mecanismos que de manera autónoma mantienen variables de interés de un proceso dentro de límites establecidos a pesar de variaciones externas o cambios de los valores establecidos. Formalmente, la teoría de control inició con la presentación de J. C. Maxwell *On governors* ante la Royal Society of London en 1868 (Maxwell, 1868). En la

*Autor para correspondencia
miguel.ga@veracruz.tecnm.mx

referida presentación, Maxwell, (1868) hace especial énfasis en la implicación de las "raíces imposibles" (*impossible roots* en el original), llamadas en la actualidad *raíces complejas*, sobre la estabilidad del regulador de velocidad de una máquina de vapor. A lo largo de la historia, académicos de la ingeniería química han desarrollado trascendentales contribuciones a la teoría de control. Un ejemplo reciente es el control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$, que es una clase de control geométrico paramétrico desarrollado en el seno del Cuerpo Académico de Ingeniería de Alimentos (ITVER-CA-05), en el marco de varias tesis de doctorado (Ruiz-López 2007; Carrillo-Ahumada 2011), del Tecnológico Nacional de México/I. T. de Veracruz (García-Alvarado *et al*., 2005; Ruiz-López *et al*., 2006; García-Alvarado y Ruiz-López 2010; Carrillo-Ahumada *et al*., 2011; Vargas-González *et al*., 2013; González-González *et al*., 2020). Con base en lo anterior, el objetivo de este ensayo de divulgación es presentar la definición formal del control en $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$, su interpretación en lenguaje natural, sus aplicaciones actuales, su relevancia debida al principio de parsimonia y un análisis prospectivo de futuras aplicaciones. Asociada a la definición formal, se promueve la creación de conciencia entre jóvenes estudiantes o jóvenes investigadores de la importancia y capacidad de expresión de los lenguajes formales, así como la relación entre la concepción abstracta y su aplicación en la ingeniería. En cuanto a la estructura, es preciso mencionar el título, ya que es sumamente compacto para mostrar la capacidad de expresión del término $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$; en la sección 2 se expone el concepto solo con matemáticas y en la sección 3 se expresa en lenguaje natural (español); por último, en las secciones 4 y 5 se detallan las aplicaciones en ingeniería tanto las del presente como las que tienen potencial a futuro.

1. Definición formal

De manera formal, un control en $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ se define (Ruiz-López *et al*., 2006; González-González *et al*., 2020; Carrillo-Ahumada *et al*., 2020) como:

$$\min I\,(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2) = \int_0^\infty e'Qedt + \int_0^\infty u_d'Ru_d dt \tag{1}$$

$$\rightarrow (\lambda_i : \{|\mathbf{I}\lambda_i - \mathbf{A}| = 0\} \in \mathcal{D}, \forall i = 1, 2,, (n + k)) \rightarrow (\mathcal{D} \subset C\_ = \{z : Im(z)/\mathcal{R}e(z) < \varphi\}) \tag{2}$$

$$e = r - y \in \mathcal{R}^r,\ u_d = u - u_\infty \in \mathcal{R}^c$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1 w + B_2 u \tag{3}$$

$$y = Cx + D_1 w + D_2 u \tag{4}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha\xi + \beta_1 r + \beta_2 y \tag{5}$$

$$u = \gamma\xi + \delta_1 r + \delta_2 y \tag{6}$$

$$u_\infty = \lim_{t\rightarrow\infty} u \tag{7}$$

$$\mathrm{I} : \mathcal{R}^r \times \mathcal{R}^c \rightarrow \mathcal{R},\ x \in \mathcal{R}^n,\ \xi \in \mathcal{R}^k,\ w \in \mathcal{R}^m,\ Q \in \mathcal{R}^{n\times n},\ R \in \mathcal{R}^{c\times c},\ A \in \mathcal{R}^{n\times n}$$

$$B_1 \in \mathcal{R}^{n\times m},\ B_2 \in \mathcal{R}^{n\times c},\ C \in \mathcal{R}^{r\times n},\ D_1 \in \mathcal{R}^{r\times m},\ D_2 \in \mathcal{R}^{r\times c},\ \alpha \in \mathcal{R}^{k\times k},\ \beta_1 \in \mathcal{R}^{k\times r},$$

$$\beta_2 \in \mathcal{R}^{k\times r},\ \gamma \in \mathcal{R}^{c\times k},\ \delta_1 \in \mathcal{R}^{c\times r},\ \delta_2 \in \mathcal{R}^{c\times r}$$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}_1 w + \mathbf{B}_2 r \tag{8}$$

$$y = \mathbf{C}_1\mathbf{X} + \mathbf{D}_{11} w + \mathbf{D}_{12} r \tag{9}$$

$$u = \mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}w + \mathbf{D}_{22}r \tag{10}$$

$$\mathbf{X}' = [x' \ \xi'] \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A + B_2\delta_2\Delta_1 C & B_2\Delta_2\gamma \\ \beta_2\Delta_1 C & \alpha + \beta_2\Delta_1 D_2\gamma \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 + B_2\delta_2\Delta_1 D_1 \\ \beta_2\Delta_1 D_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2\Delta_2\delta_1 \\ \beta_1 + \beta_2\Delta_1 D_2\delta_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_1 = [\Delta_1 C \ \ \Delta_1 D_2\gamma] \quad \mathbf{C}_2 = [\delta_2\Delta_1 C \ \ \Delta_2\gamma]$$

$$\mathbf{D}_{11} = \Delta_1 D_1 \quad \mathbf{D}_{12} = \Delta_1 D_2\delta_1 \quad \mathbf{D}_{21} = \delta_2\Delta_1 D_1$$

$$\mathbf{D}_{22} = \Delta_2\delta_1 \quad \Delta_1 = (\mathbf{I} - D_2\delta_2)^{-1} \quad \Delta_2 = \mathbf{I} - \delta_2\Delta_1 D_2$$

2. Definición en lenguaje natural

La traducción a lenguaje natural (español) de la definición de control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ implícita en las ecuaciones (1)-(10) se detalla a continuación. Existe un índice de funcionamiento cuadrático (ec. 1) que alcanza un valor mínimo en función de los parámetros α, β_1, β_2, γ, δ_1 y δ_2 del algoritmo de control, representado en las ecs. (5)-(6), que actúa en un proceso definido por las ecs. (1)-(2) con parámetros agrupados en las matrices A, B_1, B_2, C, D_1 y D_2. Como las integrales de la ec. (1) son impropias sobre el tiempo (t) y están formadas por las sumas de cuadrados de los vectores diferencia de números reales e y u_d, la única forma de que la ec. (1) alcance un valor mínimo es que e y u_d sean elementos de espacios normados de Lebesgue ($\mathcal{L}_2$). La condición (2) restringe el mínimo de la integral (1) para que solo exista cuando los valores propios de la matriz de lazo cerrado **A**, que se construye cuando las ecs. (1)-(2), (3)-(4) se unifican en las ecs. (8)-(10), estén localizados en una región definida del semiplano complejo izquierdo $\mathcal{D}$, donde la relación de la parte compleja sobre la real es menor que un valor definido φ (de preferencia menor que 1).

El índice de funcionamiento cuadrático I está formado por la integral de toda la historia del cuadrado del error (e) del sistema de control y la integral del cuadrado de toda la historia de la desviación de la acción de control (u_d), normalizado con las matrices de ponderación Q y R. El error (e) es la diferencia entre el valor de referencia o *set point* (r) de la variable objetivo con respecto a su valor actual (y). La desviación de la acción de control (u_d) es la diferencia entre la acción de control instantánea (u) y la acción de control cuando el sistema ha retornado a un estado estable (u_∞). El hecho que e y u_d sean elementos de $\mathcal{L}_2$ implica que el sistema de control bajo $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ es asintóticamente estable. ξ y x son el estado del algoritmo de control (ecs. 5 y 6) y del sistema controlado (ecs. 3 y 4),– los cuales, si su espacio de estado es suave o lineal, son elementos de una variedad, y con ello se cumple con la definición de control geométrico (González-González *et al*., 2020),– y w son las perturbaciones del sistema.

La característica principal de un control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ es su principio de parsimonia: minimizar el cuadrado de toda la historia del error con un esfuerzo mínimo. Esa característica fue detallada por González-González *et al*. (2020) al demostrar la naturaleza no necesariamente competitiva de las dos integrales que forman I cuando se asegura que los valores propios de **A** se localicen en $\mathcal{D}$. Está última propiedad matemática hace referencia al estudio de Maxwell (1868), pues el espacio $\mathcal{D}$ restringe el valor de la parte compleja de los valores propios referidos, o sea, a las llamadas *raíces imposibles* por Maxwell (1868). Otro grupo de investigación independiente (Voßwinkel *et al*., 2019) ha demostrado que mantener los valores propios de **A** en la región $\mathcal{D}$ asegura un control amortiguado.

3. Aplicaciones actuales

El control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ se ha aplicado con éxito en simuladores de procesos de columnas de rectificación continuas (Ruiz-López *et al*., 2006; García-Alvarado y Ruiz-López, 2010; Estévez-Sánchez *et al*., 2017), reactores químicos

(Ruiz-López *et al*., 2006; Carrillo-Ahumada *et al*., 2011), reactores bioquímicos (Ruiz-López *et al*., 2006); Carrillo-Ahumada *et al*., 2011; Carrillo-Ahumada *et al*., 2020), intercambiadores de calor de tanque (Vargas-González *et al*., 2013), intercambiadores de calor de tubos concéntricos (González-González *et al*., 2020) e, inclusive, en un simulador electro-mecánico (simulador físico) de un sistema aeronáutico (Carrillo Ahumada *et al*., 2015).

En todos los ejemplos citados, el control $\mathcal{L}_2 / \mathcal{D}$ demostró mejor desempeño con mayor parsimonia que controles sintonizados con otros criterios aplicados a los mismos sistemas: control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ en reactores químicos (Chen *et al*., 2002; Gonçalves *et al*., 2008), control no-lineal de columnas de rectificación continuas (Tan *et al*., 2002), el control geométrico acotado en intercambiadores de calor de tubos concéntricos (Maidi *et al*., 2009) y control con polos dominantes inestables en reactores bioquímicos (Sree y Chidambaram, 2003).

Es importante enfatizar que debido a la naturaleza abstracta del concepto, este puede tener aplicación en cualquier sistema físico descrito por el espacio de estado definido en las ecs. (3)-(4). Incluso, se ha demostrado (González-González *et al*., 2020) que el control $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$ trabaja adecuadamente aunque los procesos solo se describan de manera aproximada por el espacio de estado. González-González *et al*. (2020) demostraron que el control de un intercambiador de calor de tubos concéntricos descritos por un sistema de 60 ecuaciones diferenciales no-lineales aproximado con 60 ecuaciones diferenciales linealizadas por serie de Taylor resultó en un control que mantiene su índice de funcionamiento cuadrático I cuando se valida con las ecuaciones no-lineales originales. La metodología recomendada para encontrar un control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ es el siguiente:

3. 1. Inicialización

Se resuelve el siguiente problema:

$$\min \Sigma(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2) \tag{11}$$

donde:

$\Sigma = \max \mathcal{R}e(\lambda_i), \lambda_i : \{|\mathbf{I}\lambda_i - \mathbf{A}| = 0\} \; \forall i = 1, 2,, (n + k)$

Esto es, el problema es minimizar la abscisa espectral (Σ) de la matriz característica ($\mathbf{A}$) de lazo cerrado del sistema de control como función de los parámetros del algoritmo de control $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2$. Para asegurar que el sistema sea asintóticamente estable se debe alcanzar un valor negativo en Σ.

3. 2. Búsqueda de la colocación adecuada de los valores propios en $\mathcal{D}$

Se resuelve el siguiente problema con la solución del problema (11) como valor inicial.

$$\min \varphi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2) \tag{12}$$

Donde:

$\varphi = \max \left(Im(\lambda_i)/\mathcal{R}e(\lambda_i)\right) \quad \lambda_i : \{|\mathbf{I}\lambda_i - \mathbf{A}| = 0\} \quad \forall i = 1, 2,, (n + k)$

Sujeto a:

$\Sigma < \Sigma_{\max}$

El problema es minimizar la relación φ de los valores propios de la matriz característica ($\mathbf{A}$) de lazo cerrado del sistema de control como función de los parámetros del algoritmo de control $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2$ para delimitar la región que define $\mathcal{D}$, donde se mantenga una abscisa espectral máxima $\Sigma_{\max}$ en un determinado valor negativo. El principal objetivo es localizar parámetros del control en una región donde $\varphi < 1$, lo cual no siempre es posible.

3. 3. Localizar el control $\mathcal{L}_2 / \mathcal{D}$

A partir de los resultados del problema definido en la sección 3. 2. se estiman los valores adecuados de las matrices de ponderación Q y R (la estructura mas sencilla son múltiplos de la matriz identidad) de manera que ambas integrales de la ec. (1) estén dentro del mismo orden de magnitud. Una vez establecidas las matrices se resuelve el problema de la ec. (1) con la ec. (2) como restricción donde se utilizan los resultados del problema definido en la sección 3. 2. como punto de partida.

Las integrales de la ec. (1) se pueden calcular (García-Alvarado y Ruiz-Lopez, 2010; Vargas-González *et al.*, 2013) para la función escalón unitario ($1(t)$) en la referencia con

$$I_e = \int_0^{\infty} e'Qedt = K'\mathbf{B}'_2\, P_y \mathbf{B}_2 K \text{ para } w = 0,\ r = 1(t)K \tag{13}$$

$$I_u = \int_0^{\infty} u'_d\, Ru_d dt = K'\mathbf{B}'_2\, P_u \mathbf{B}_2 K \text{ para } w = 0,\ r = 1(t)K \tag{14}$$

donde P_y y P_u son soluciones de la ecuación de Sylvester,

$$\mathbf{A}'P_y + P_y\mathbf{A} - (\mathbf{A}^{-1})\ \mathbf{C}'_1\ Q\mathbf{C}_1\ (\mathbf{A}^{-1}) = 0 \tag{15}$$

$$\mathbf{A}'P_u + P_u\mathbf{A} - (\mathbf{A}^{-1})\ \mathbf{C}'_2\ R\mathbf{C}_2\ (\mathbf{A}^{-1}) = 0 \tag{16}$$

Y K es un valor arbitrario definido por el usuario.

Como ejemplo, un algoritmo de control proporcional integral PI,

$$u = k_p e + k_i \int_0^t e \tag{17}$$

Se puede escribir en términos de las ecs. (5)-(6) como:

$$\frac{d\xi}{dt} = r - y \tag{18}$$

$$u = k_i\xi + k_p r - k_p y \tag{19}$$

Por lo tanto, los problema de las secciones 3. 1.-3. 3. se resuelven solo para los parámetros k_p y k_i.

Todo el *software* para encontrar un control $\mathcal{L}_2 / \mathcal{D}$ con la metodología de las secciones 3. 1.-3. 3. se encuentra disponible en el Laboratorio de Bioestadística de la UNIDA del Tecnológico Nacional de México Campus Veracruz. Todos los problemas de optimización se resuelven con el algoritmo Box-Ruiz-Rodríguez-García detallado en Ruiz-López *et al.* (2006), el cual es un algoritmo de búsqueda aleatoria dirigida que no utiliza derivadas y fue adaptado para resolver problemas de optimización con restricciones en una región no-necesariamente convexa.

Prospectiva

A la fecha, el control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ se ha utilizado con algoritmos de control PI (proporcional integral) o PDI (proporcional derivativo e integral), lo cual ha representado ciertas limitaciones. Por ejemplo, en el control de intercambiadores de calor de tubos concéntricos con un espacio de estado de 60 ecuaciones diferenciales (González-González *et al*., 2020) no fue posible definir $\mathcal{D}$ para $\varphi < 1$. Existen razones teóricas para suponer que será posible alcanzar $\varphi < 1$ con mayor orden en la integración del error. Hoy en día, el control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ se está probando en sistemas de espacios de estado elevado (30 o más ecuaciones diferenciales) con un algoritmo PDII^2 (acción proporcional, derivativa, integral y doble integral).

La parsimonia del control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ se manifiesta en su nombre, en su formalización y en su desempeño; en su nombre, porque la simbología matemática expresa un control asintóticamente estable con mínimo índice de funcionamiento y amortiguado sin sobre impulsos. En su formalización, pues, queda definido en su totalidad con las ecs. (1)-(10) y en su desempeño, que es consecuencia de acotar las oscilaciones y la integral I_u sin entrar en competencia con I_e. La referida parsimonia representa una ventaja fundamental en el control de sistemas de soporte vital médico. Por ejemplo, en ventiladores mecánicos para respiración asistida se puede asegurar la saturación de oxígeno del paciente con la mínima acción de control y prevenir así el exceso de presión en los pulmones y desgaste prematuro de los componentes mecánicos.

Conclusiones

Como se ha detallado, el control $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ es un concepto abstracto del control geométrico con potencial de ser aplicado en otros procesos tanto de la ingeniería química como electro-mecánica y biomédica. En este artículo se ha presentado tanto su versión formal como descripción en lenguaje natural para difundirlo entre la comunidad académica de México (y otros lugares de habla hispana) con el propósito de que sea de utilidad tanto para académicos consagrados como para los jóvenes investigadores en el área de control.

Agradecimientos

Agradecemos a los revisores del manuscrito que con sus observaciones mejoraron la estructura y legibilidad del artículo.

Referencias

Carrillo-Ahumada, J., Rodriguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (2011). Tuning optimal-robust linear MIMO controllers of chemical reactors by using Pareto optimality. *Chemical Engineering Journal*, *174*, 357-367. https://doi.org/10.1016/j.cej.2011.09.007

Carrillo-Ahumada, J. (2011). *Aplicación de algoritmos de control lineales en sistemas de dinámica no-lineal* (tesis de doctorado). Instituto Tecnológico de Veracruz.

Carrillo Ahumada, J. Reynoso-Meza, G., García-Nieto, S., Sanchis, J. y García-Alvarado, M. A. (2015). Sintonización de controladores Pareto-óptimo robustos para sistemas multivariables. Aplicación en un helicóptero de 2 grados de libertad. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, *12*, 177-188. https://doi.org/10.1016/j.riai.2015.03.002

Carrillo-Ahumada, J., Reynoso-Meza, G., Ruiz-López, I. I., & García-Alvarado, M. A. (2020). Analysis of open-loop and $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ controlled closed-loop behavior of the Cholette's bioreactor under different operating conditions. *Isa Transactions, 101*, 147-159. https://doi.org/10.1016/j.isatra.2020.01.039

Chen, C. L., Wang, T. C., & Hsu, S. H. (2002). An LMI approach to $\mathcal{H}_{\inf}$ PI controller design. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, *35*, 83-93. https://doi.org/10.1252/jcej.35.83

Estévez-Sánchez, K. H., Sampieri-Croda, A., García-Alvarado, M. A., & Ruiz-López, I. I. (2017). Design of multiloop PI controllers based on quadratic optimal approach. *ISA Transactions, 70*, 338-347. https://doi.org/10.1016/j.isatra.2017.07.011

García-Alvarado, M. A. Ruiz-López, I. I., & Torres-Ramos, T. (2005). Tuning of multivariate PID controllers based on characteristic matrix eigenvalues, Lyapunov functions and robustness criteria. *Chemical Engineering Science*, *60*, 897-905. https://doi.org/10.1016/j.ces.2004.09.047

García-Alvarado, M. A., & Ruiz-Lopez, I. I. (2010). A design method for robust and quadratic optimal MIMO linear controllers. *Chemical Engineering Science*, *65*, 3431-3438. https://doi.org/10.1016/j.ces.2010.02.033

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., & Takahashi, R. H. C., (2008). A novel approach for $\mathcal{H}_2$ / $\mathcal{H}_\infty$ robust PID synthesis for uncertain systems. *Journal of Process Control*, *18*, 19-26. https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2007.06.003

González-González, R., Flores-Márquez, J. A., López-Sánchez, E., Rodríguez-Jimenes, G. C., Carrillo-Ahumada, J. y García-Alvarado, M. A. (2020). Non-competitive $\mathcal{L}_2$ / $\mathcal{D}$ control applied to continuous concentric tubes heat exchangers. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, *19*, 569-583. https://doi.org/10.24275/rmiq/Sim669

Maidi, A., Diaf, M., & Corriou, J. P. (2009). Boundary geometric control of a counter-current heat exchanger. *Journal of Process Control*, *19*, 297-313. https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2008.03.002

Maxwell, J. C. (1868). *On governors*. Proceedings of the The Royal Society of London, March 5.

Ruiz-López, I. I., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (2006). Robust MIMO PID controllers tuning based on complex/real ratio of the characteristic matrix eigenvalues. *Chemical Engineering Science*, *61*, 4332-4340. https://doi.org/10.1016/j.ces.2006.02.015

Ruiz López, I. I. (2007). *Sintonización robusta de controladores multivariados PID basada en los valores propios de la matriz característica y funciones de Lyapunov* (tesis de doctorado). Instituto Tecnológico de Veracruz.

Sree, R. P., & Chidambaram, M. (2003). Control of unstable bioreactor with dominant unstable zero. *Chemical and Biochemical Engineering Quarterly*, *17*, 139-145. https://doi.org/10.15255/CABEQ.2014.617

Tan, K. K., Ferdous, R., & Huang, S., (2002). Closed-loop automatic tuning of PID controller for nonlinear systems. *Chemical Engineering Science*, *57*, 3005-3011. https://doi.org/10.1016/S0009-2509(02)00186-0

Vargas-González, S., Rodriguez-Jimenes, G. C, García-Alvarado, M. A., & Carrillo-Ahumada, J. (2013). Relation between first order dynamic parameters with PI control parameters in Nash equilibrium. *Proceedings International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering, ICMEAE*. https://doi.org/10.1109/ICMEAE.2013.21

Voßwinkel, R., Pyta, L., Schrodel, F., Mutlu, I., Mihailescu-Stoica, D., & Bajcinca, N. (2019). Performance boundary mapping for continuous and discrete time linear systems. Automatica 107, 272-280. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.05.055