ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica

Cristina Pecharromán

Resumen: Este artículo contiene un estudio de investigación teórico que interpreta el aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una posición ontológica respecto a su naturaleza. Se asocia la naturaleza de los objetos matemáticos con su origen funcional y, a partir de esta funcionalidad, se constituyen los aspectos de representación y significado que configuran el objeto matemático. La representación permite la expresión y uso del objeto. El significado atiende a la interpretación del objeto. El conjunto de interpretaciones que se pueden asociar a un objeto por la funcionalidad que representa configura su significado.

El aprendizaje de un objeto matemático atiende al aspecto representacional que le configura y al desarrollo de un significado personal sobre este desde las experiencias del individuo con el objeto. Finalmente, la comprensión de los objetos matemáticos es el reconocimiento de la funcionalidad organizativa o interpretativa del contexto que representa el objeto y el desarrollo de la capacidad de uso de esta funcionalidad.

Palabras clave: objetos matemáticos, aprendizaje, comprensión, representación, significado.

Abstract: This article contains a theoretical research study that interprets the learning and understanding of the mathematical objects from an ontological position with respect to its nature. The nature of mathematical objects is associated with their functional origin, and the aspects of representation and meaning that configured the mathematical object are constituted from this functionality. The representation allows the expression and use of the object. The meaning attends to the interpretation of the object. The set of interpretations that may be associated with an object by the functionality that it represents configures its meaning.

Fecha de recepción: 11 de diciembre de 2013; fecha de aceptación: 24 de junio de 2014.

The learning of a mathematical object serves the representational aspect that sets him, and to the development of a meaning staff on it, from the experiences of the individual with the object. Finally, understanding of the mathematical objects is recognition of organizational or interpretative functionality of the context that represents the object, and the development of the ability to use this functionality.

Keywords: mathematical objects, learning, understanding, representation, meaning.

INTRODUCCIÓN. NATURALEZA, REPRESENTACIÓN Y SIGNIFICADO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

En este apartado se presenta el marco teórico desde el que se desarrollan el resto de ideas que aporta este estudio.

Un objeto matemático es, o representa, una cualidad o una acción que tiene la función de organizar o interpretar un contexto. Así pues, los objetos matemáticos son una función organizativa o interpretativa del contexto. El objeto matemático tiene un origen e identidad funcional. La percepción racional de funciones organizativas o interpretativas del contexto promueve el descubrimiento de los objetos matemáticos. La creación del objeto se inicia con la separación o abstracción[1] de la funcionalidad del contexto y la situación particular.[2]

La creación del objeto matemático se manifiesta cuando este queda configurado por aspectos de representación y significado. La representación permite la expresión y uso del objeto. El significado atiende a la interpretación del objeto. Estos aspectos se desarrollan desde la funcionalidad que representa el objeto.

En primer lugar, un objeto matemático necesita ser expresado. La creación de un objeto matemático conlleva un proceso en el que se hace corresponder la funcionalidad, que es el objeto, un signo o conjunto de signos que representan el objeto y permiten su expresión. La funcionalidad que representa el objeto motiva el signo que lo representa desde el contexto en que se manifies-

[1] Proceso de abstracción ligado al descubrimiento y creación del objeto matemático.

[2] El término "contexto" hace referencia al que ofrece el medio físico y los que pueden proporcionar la representación de un objeto matemático o conjunto de ellos (registro semiótico). En estos contextos, tienen lugar situaciones que ofrecen la percepción racional del objeto matemático. Por ejemplo, en el contexto de los números naturales, se crean situaciones *aditivas* que permiten la percepción del objeto matemático *suma*.

ta.[3] Siguiendo a Peirce (1987),[4] los signos que expresan y caracterizan la funcionalidad que es, o representa, el objeto se denominan iconos o signos que tienen alguna semejanza con el objeto o mantienen alguna relación racional con él. Los iconos quedan configurados al expresar las relaciones que surgen entre los objetos del contexto que son sometidos a la funcionalidad que representa el objeto. Los iconos se crean desde el contexto de percepción racional del objeto y, por tanto, dependen de la naturaleza y conocimiento del contexto, conocimiento que está ligado al momento sociocultural.

Según el registro semiótico en el que se han formado, los iconos pueden ser representaciones analógicas (gráficas y geométricas) o digitales (verbales, numéricas, algebraicas).[5] En general, una situación de percepción de un objeto matemático en un contexto es una manifestación de este objeto y, por tanto, se puede considerar que la propia situación es una representación icónica del objeto matemático. Por ejemplo, la relación entre los kilos de un producto y su precio manifiesta el objeto matemático *función;* el reparto de 15 bolas en paquetes de 5 muestra la acción de *dividir.* A partir de estas situaciones y como parte de la construcción del objeto matemático, se crean signos icónicos para ofrecer un soporte de percepción del objeto que sustituye al contexto y situación particular de percepción. Por ejemplo, un cociente indicado de dos números naturales para representar una selección en una partición equitativa de una forma geométrica, "III" para representar la cantidad de tres elementos cualesquiera, el trazado de un polígono...

En cambio, los signos que representan el objeto tras una asociación externa con él, impuesta por hábito o convención, se denominan símbolos. Por ejemplo, los nombres comunes de los objetos matemáticos, "2", "$f'(x)$", "A"..., que son signos denominativos del objeto. La razón del uso de símbolos puede ser también la de conseguir una expresión más simplificada de los objetos matemáticos que la que

[3] "Los actos más elementales de formación son, según los registros, la designación nominal de objetos, la reproducción de su contorno percibido, la codificación de relaciones o de algunas propiedades de un movimiento" (Duval, 1999, p. 41). "La conexión entre signo y objeto se establece no solo por medios físicos o causales, sino también por similaridad y convención" (Marafioti, 2004, p. 78).

[4] "Puede haber una simple relación racional entre el signo y la cosa; en ese caso, el signo es un icono. O bien puede haber una conexión física directa; en ese caso, el signo es un índice. O bien puede haber una relación que consiste en que la mente asocia el signo con su objeto; en ese caso el signo es un nombre (o símbolo)" (Peirce, 1987, p. 175).

[5] "Cualquier ecuación algebraica es un icono en la medida en que exhibe, mediante los signos algebraicos (que no son ellos mismos iconos), las relaciones de las cantidades en cuestión" (Peirce, 1987, p. 265). "Las expresiones algebraicas, pues, son un ejemplo de la imbricación de los tres tipos de signos en las escrituras matemáticas: las letras son índices, los signos +, =, etc. son símbolos y la expresión globalmente considerada es un icono" (Puig, 2003, p. 7).

permiten los iconos (representación de representación). En general, los signos se crean y desarrollan para facilitar la expresión y uso del objeto y sus propiedades.

En segundo lugar, un objeto matemático necesita ser interpretado. El conjunto de interpretaciones que se pueden asociar a un objeto por la funcionalidad que representa configura su significado. El significado de un objeto se desarrolla desde la caracterización y discriminación de la funcionalidad que representa a través de la expresión discriminatoria del objeto, de su uso funcional y de las relaciones del objeto:

- Las representaciones del objeto matemático, como signos que permiten su expresión, contribuyen al desarrollo de su significado y permiten (los iconos) la interpretación de sus propiedades y relaciones internas, que también son caracterizadoras del objeto. Además, ciertas componentes del icono permiten discriminar y caracterizar al objeto matemático (número de lados de u n polígono, grado de un polinomio...). Finalmente, el tratamiento de las representaciones (transformación y conversión) puede caracterizar o contribuir a la interpretación del objeto (conversión algebraico-gráfica de una función).
- Una funcionalidad se pone de manifiesto a través de su uso en un contexto y una situación. La función organizativa o interpretativa que representa el objeto lo dota de una potencialidad de uso. El uso del objeto para interpretar u organizar ciertas situaciones desarrolla el significado del objeto matemático. Un significado asociado al uso en contextos y situaciones concretas. Por ejemplo, una matriz como conjunto ordenado de números o una matriz para representar una aplicación lineal; una función para expresar la relación de magnitudes variables o una función como incógnita de una ecuación diferencial...
- Finalmente, el objeto matemático establece relaciones con otros fundamentadas en la naturaleza y propiedades del objeto, que lo ubican en el conocimiento matemático previo (conocimiento científico) y también permiten interpretarlo.

Relaciones clasificatorias. Surgen cuando se organizan los objetos matemáticos según su origen funcional (números naturales, formas geométricas...). Se consigue una clasificación más fina o subclases si, además, se consideran cualidades o atributos discriminatorios del objeto, como representación, relaciones internas, propiedades, uso (números pares, impares..., cuadrado, triángulo...). Cada clase dirige una abstracción conceptual (por ejemplo, una clase de fracciones equivalentes representa un número racional y dirige la abstracción conceptual de este concepto matemático). El concepto o representante de la clase asume la naturaleza y los atributos invariantes de manifestación particular del objeto. Una definición verbal del objeto matemático abstracto asociada a la manifestación del objeto es un icono que describe la funcionalidad que representa el objeto. Por ejemplo, un triángulo es la región del plano delimitada por tres rectas que se cortan dos a dos.

Relaciones inclusivas. Surgen de la graduación de las clases según los atributos que se seleccionen para delimitarlas (triángulo equilátero, triángulo, polígono, forma geométrica plana). Atendiendo a esta gradación, cada clase está incluida en otra cuyos objetos tienen el mismo origen funcional (naturaleza o identidad), pero están caracterizados por menos atributos o una generalización de atributos comunes.[6] Las relaciones de inclusión también permiten definir los objetos matemáticos. La definición del objeto surge al identificarlo con un objeto más abstracto desde el que se asume la identidad o naturaleza y se añaden las propiedades o características necesarias que permitan su discriminación. Por ejemplo, un triángulo es un polígono de tres lados.

La figura 1 expresa que la creación de un objeto matemático consiste en asociar un aspecto representacional y un significado a la funcionalidad que representa. La configuración de estos aspectos es permitida y dirigida por dicha funcionalidad, como se ha descrito en este apartado. La figura permite entrever la relación triádica signo-objeto-significado a través de la cual se plantearán las conclusiones de este artículo.

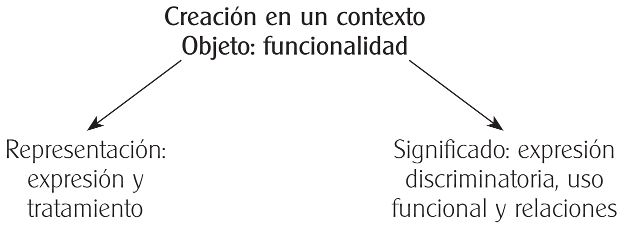

Figura 1. Los aspectos de representación y significado de un objeto matemático se desarrollan desde la funcionalidad que representa el objeto

[6] *Abstracción conceptual inclusiva.* El objeto abstracto que representa una clase asume la identidad común de los objetos que contiene la clase, pero generaliza los atributos comunes que los caracterizan.

Finalmente, se señala la necesaria referencia al contexto para el reconocimiento del objeto a través del signo, y la referencia a la situación para reconocer su significado concreto (uso). Un objeto matemático es una cualidad o acción en el contexto, por tanto, el objeto debe ser reconocido desde la interpretación u organización que hace del contexto.

Por una parte, un signo puede representar objetos distintos. Es necesaria la interpretación del signo en relación con el contexto para reconocer el objeto que representa. Ejemplos de signos y objetos correspondientes, "x": variable, indeterminada o incógnita..., "+": operación, rectas perpendiculares..., "raíz": radical, cero de un polinomio..., "a^{-1}": inverso de un número, función recíproca. Un par de números reales: intervalo de la recta real, un punto del plano afín o un vector de V^2. La contigüidad de dos símbolos: 739, adición implícita (en aritmética), xy, multiplicación (en álgebra), $g(x)$, dependencia o relación funcional (en análisis).

Por otra parte, el significado inmediato del objeto viene dado por el contexto, la situación de reconocimiento y su uso. Por ejemplo, el objeto representado por "+" puede indicar un valor positivo, una operación...; el objeto "=" puede indicar un resultado, $2 + 3 = 5$; una identidad, $2 + 3 = 3 + 2$; una ecuación, $2x + 3y = 5$...

APRENDIZAJE Y COMPRENSIÓN DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

El aprendizaje de un objeto matemático atiende al aspecto representacional que lo configura y el desarrollo de un significado personal sobre este.

El aspecto representacional abarca la expresión del objeto y de sus propiedades. Por tanto, todas las representaciones del objeto y el tratamiento de estas en cada registro forman parte de su aprendizaje, así como la expresión de las relaciones del objeto con otros expresados en el mismo registro (por ejemplo, los operadores) y el tratamiento representacional que implica.

El aprendizaje del objeto matemático también supone el desarrollo de un significado personal sobre este desde las experiencias del individuo con el objeto. Se considera que el significado personal es la información que tiene el individuo sobre el objeto y que le permite su interpretación y caracterización. Un adecuado aprendizaje necesita que el significado o la interpretación del objeto atienda a tres aspectos: la expresión discriminatoria, el uso funcional del objeto (que da sentido a la existencia del objeto y a su aprendizaje) y las relaciones del objeto con otros de la estructura cognitiva o conocimiento previo del individuo (que favorecen la incorporación del objeto en esta estructura y su organización). El reconocimiento de relaciones del objeto, clasificatorias o inclusivas lleva asociado procesos de particularización, abstracción y generalización que también contribuyen a la organización o reorganización de la estructura cognitiva del individuo.[7]

Se construyen representaciones internas o mentales[8] del objeto en correspondencia con el significado personal que se desarrolla. Algunas de ellas son contenido de recuerdo consciente que se utiliza para expresar lo que se conoce sobre el objeto de manera explícita o como guía de la expresión.[9] Es decir, son referencias para expresar un significado del objeto, una descripción del objeto o de algún aspecto de él... También son referencias para el desarrollo de operaciones cognitivas que involucran al objeto (generalización, particularización...). Las representaciones internas pueden ser imágenes mentales desarrolladas desde las representaciones externas del objeto. Estas imágenes son un medio de recuerdo del objeto, pero no son el objeto ni una imagen suya. Igual que las representaciones externas, necesitan una interpretación funcional que oriente el reconocimiento del objeto a través de ellas. Las representaciones internas también pueden elaborarse desde el tratamiento de las representaciones del objeto, el uso funcional del objeto o las relaciones del objeto con otros. Por ejemplo, las representaciones mentales de los objetos que no tienen una existencia material, sino una identidad funcional organizadora o interpretativa del contexto (temperatura, tiempo, intensidad de corriente, solidaridad, objeto matemático...) se desarrollan por medio de experiencias que ofrecen la percepción sensorial, sensible o racional de estos objetos, según corresponda, y permiten reconocer y caracterizar el objeto. En el caso de los objetos matemáticos, la formación de representaciones internas tiene lugar mediante sus representaciones externas y mediante los contextos y situaciones de uso del objeto por el individuo.

La comprensión de los objetos matemáticos es el reconocimiento de la funcionalidad organizativa o interpretativa del contexto que representa el objeto y el desarrollo de la capacidad de uso de esta funcionalidad.

La comprensión se consigue por medio del aprendizaje del objeto. En con-

[7] Dreyfus (1991, p. 37) indica que abstracción es un proceso de construcción de estructuras mentales desde estructuras matemáticas. Requiere la habilidad de trasladar la atención de los objetos a la estructura de sus propiedades y sus relaciones, y depende de la separación de las apropiadas propiedades y relaciones. "Generalizar es derivar o inducir de lo particular, identificar lo común, expandir dominios de validez" (Dreyfus, 1991, p. 35).

[8] "[Las representaciones mentales] son el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto" (Duval, 1999, p. 14).

[9] "Puede haber una gran diferencia entre las representaciones mentales de un sujeto y las representaciones semióticas que él produce para expresar sus representaciones mentales" (Duval, 1999, p. 35).

creto, la percepción o el reconocimiento de la funcionalidad que representa el objeto matemático se alcanza mediante: la interpretación de los iconos que representan al objeto, la percepción de la utilidad del uso del objeto en contextos y situaciones diversas, y la información que aportan las relaciones del objeto con otros.

El reconocimiento de la funcionalidad capacita para el uso del objeto en contextos y situaciones diversas, porque la funcionalidad permite, motiva y dirige el uso. La comprensión también permite interpretar los atributos del objeto (representación, propiedades, relaciones...) desde la funcionalidad que representa.

Sin embargo, la comprensión supone distinguir el objeto de sus representaciones.[10] El objeto matemático es, o representa, una funcionalidad (cualidad, acción) en un contexto. Por tanto, no tiene existencia material, la tiene el contexto de percepción de la funcionalidad (un contexto físico, la representación de un objeto matemático, un registro semiótico). El objeto matemático tiene existencia mediante la percepción racional de la función organizativa o interpretativa del contexto que representa. Los iconos que representan al objeto no son ni el objeto ni una imagen de este, sino un medio o soporte de percepción del objeto. El objeto es lo que ofrece la interpretación del icono desde el contexto. Por ejemplo, una función no es lo que tiene x o y, ni una tabla, fórmula..., sino que una función es una relación (aplicación) entre dos variables. Además, el hecho de que un signo pueda ser representación de objetos distintos manifiesta la necesidad de reconocer el objeto por medio del signo y contexto, y no identificarlo con el signo. Asimismo, la comprensión supone independizar el objeto del uso particular y de los contextos y situaciones de uso. El uso del objeto muestra una utilidad que, abstraída del contexto y situación, orienta la percepción de la funcionalidad que representa el objeto.

En definitiva, la comprensión supone el paso de la percepción sensorial de los iconos que representan al objeto a la percepción racional del objeto por medio de ellos, o mediante situaciones de manifestación del objeto. La funcionalidad que representa el objeto matemático se manifiesta como un invariante que subyace en las representaciones icónicas del objeto y en las situaciones de manifestación del objeto, y al cual converge su aprendizaje. La comprensión es una abstracción desde la expresión y uso del objeto que desemboca en la función organizativa o interpretativa que representa al objeto.

[10] "No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación" (Duval, 1999, p. 13).

Aunque la comprensión es el objetivo del proceso de aprendizaje del objeto matemático, puede haber cierto aprendizaje y no haber comprensión. Por ejemplo, se puede calcular una integral definida sin reconocer este objeto. En este caso, el aprendizaje queda confinado a aspectos representacionales de expresión y tratamiento (una función es lo que tiene *x* y *y*, lo que se pasa a gráfica...), a usos en contextos y situaciones particulares (una función: para describir un movimiento...), y a las relaciones del objeto con otros, establecidas por caracterizaciones o usos comunes de los objetos (por ejemplo, se relaciona el concepto de expresión algebraica y el de polígono por la forma de la representación externa de ambos conceptos, no porque se observe que uno es un caso particular de otro). Este aprendizaje se desarrolla atendiendo la información que ofrece el proceso de enseñanza y el conocimiento previo del individuo. Es un aprendizaje memorístico, pues se desarrolla desde la semejanza o similitud con experiencias previas, y es mecánico, ya que la similitud provoca la actuación por analogía.

Por tanto, un estado provisional de conocimiento matemático queda configurado por el conjunto de contenidos matemáticos que posee el individuo y por la capacidad de utilizarlos para organizar o interpretar contextos y situaciones diversas (resolver problemas) y para fundamentar nuevos aprendizajes de acuerdo con el aprendizaje y la comprensión del citado contenido.

La figura 2 expresa que el aprendizaje de un objeto matemático abarca el aspecto representacional del objeto y el desarrollo de un significado personal sobre él. Ambos aspectos son medios que permiten alcanzar la comprensión del objeto.

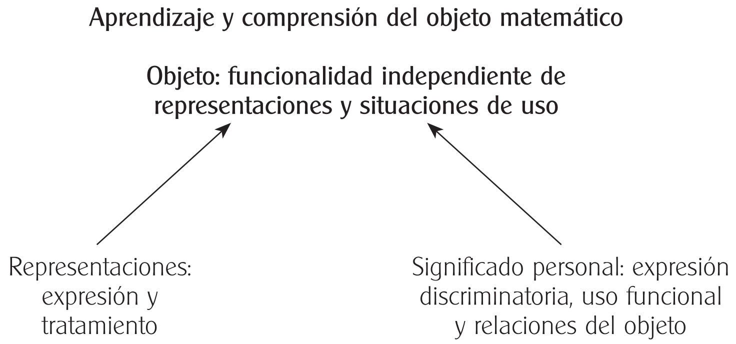

Figura 2. Los aspectos de representación y significado de un objeto matemático son los medios para alcanzar su comprensión

DESARROLLO DE LA COMPRENSIÓN

En este apartado se describe la consecución de la comprensión de los objetos matemáticos por medio de sus representaciones, su uso en contextos y situaciones diversas y las relaciones del objeto con otros.

El aprendizaje y comprensión de los objetos matemáticos necesita un conocimiento previo desde el cual analizar e interpretar la nueva información. Este conocimiento comprende los contextos o registros semióticos y las situaciones en las que se manifiesta el nuevo objeto.

Iconos: reconocimiento del objeto

Los iconos son expresiones que muestran la funcionalidad organizativa o interpretativa que representa el objeto desde un contexto conocido. En cambio, los símbolos solo cumplen la función de representar el objeto, no aportan información sobre la identidad funcional del objeto. Los símbolos son una imagen que, desde un contexto, remite al objeto, siempre que el individuo conozca la relación semiótica entre el símbolo y el objeto.

Por tanto, los iconos son medios de percepción o reconocimiento de la funcionalidad que representa el objeto matemático. Los iconos representan al objeto en relación con el contexto, ya sea como una cualidad o potencialidad del contexto o como una acción en este. El análisis del icono (interpretación de las componentes que configuran el icono y sus relaciones) desde su interacción en el contexto es un medio de reconocimiento del objeto (¿qué hace el icono en el registro? o ¿qué representa del registro?) y un medio de evitar la identificación del objeto con la imagen que ofrece el signo.

El aprendizaje del objeto matemático también necesita el reconocimiento de unas componentes o unidades significantes[11] caracterizadoras y discriminadoras del objeto o funcionalidad, presentes en los iconos o identificables desde ellos.[12] Por ejemplo, la pendiente de una recta, el número de lados de un polígono, el par de números que configuran una fracción, el grado de un polinomio...

[11] "Se considera como unidad significante elemental toda unidad que depende del 'léxico' de un registro" (Duval, 1999, p. 50). Duval (1999, pp. 74-75) considera como unidades significantes aquellas componentes de la representación cuya variación (dejando el resto de variables fijas) produce variaciones observables en la representación del objeto en otro registro.

[12] Esta interpretación conduce a considerar las unidades significantes como signos indiciales del objeto, pues señalan al objeto.

son cualidades que permiten la interpretación u organización estructural del objeto matemático y, por tanto, son también objetos matemáticos.

El icono formado en el contexto de descubrimiento de la cualidad o acción que representa el objeto es el que mejor muestra la funcionalidad que da origen al objeto. Por ejemplo, los objetos matemáticos que surgen asociados a una medida (fracciones, irracionales, decimales...) muestran mejor la funcionalidad que representan desde los registros geométrico o gráfico. El límite de una función en un punto,[13] la integral definida..., son objetos que tienen origen en el registro geométrico y, desde el registro gráfico asociado a una función, muestran su funcionalidad. La unidad imaginaria es motivada por situaciones del registro algebraico...

Sin embargo, el uso de la funcionalidad que representa el objeto en contextos y situaciones distintas a la originaria hace necesaria la construcción de iconos equivalentes en otros registros, atendiendo a la naturaleza de las componentes del registro y la dinámica que le rige. Estos registros no siempre proporcionan un contexto que facilite la percepción de la funcionalidad que da origen al objeto matemático, lo que hace necesario interpretar los nuevos iconos a través de aquel que muestra la funcionalidad del objeto como una cualidad o acción en el contexto.

Para ello, se relacionan los iconos relativos a dos registros desde la naturaleza de los objetos elementales que los configuran. Cuando la relación entre los iconos, además de atender a una relación física o conversión procedimental, atiende a la interpretación del objeto a través de ambos iconos, se habla de equivalencia o coordinación[14] entre ellos. Desde esta equivalencia, la funcionalidad del objeto es asumida por el nuevo icono, y el nuevo icono puede interpretarse desde esa funcionalidad. La coordinación entre dos iconos es una relación fundamentada en la representación del mismo objeto, aunque necesita de la conversión procedimental.

Los nuevos iconos son medios de expresión de la funcionalidad que representa el objeto, pero además, lo dotan de nuevas interpretaciones y usos, que son adquiridos desde el registro de representación y situaciones en él, lo cual amplía el significado del objeto. Por ejemplo, el objeto fracción desarrolla los significados de cociente indicado de dos números enteros y de operador cuando está representado en el registro numérico y se utiliza para las situaciones res-

[13] En Blázquez y otros (2006) se observa que, hasta finales del siglo XVII, la idea de límite estaba asociada a aproximaciones en procesos geométricos iterados, como el método de exhaución.

[14] "La actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación" (Duval, 1999, p. 60).

pectivas que dan lugar a estas interpretaciones. Cada icono, desde su registro, aporta una información sobre el objeto que puede ser destacada en detrimento de otra.[15] Por consiguiente, el uso o interpretación concreta del objeto orienta su expresión. Por ejemplo, para mostrar la magnitud de un radical se utiliza su expresión decimal, pero para operar radicales se utiliza su expresión radical para acumular menor error. La representación algebraica de una función cuantifica o valora la relación de dependencia y explicita la variabilidad de las magnitudes relacionadas; la representación gráfica asocia una forma a la relación que facilita la interpretación de sus propiedades.

La coordinación de estos dos iconos permite que uno sea interpretativo y justificativo del otro recíprocamente cuando esta interpretación atiende a la funcionalidad originaria del objeto, ya que los usos o interpretaciones del objeto que surgen por la naturaleza del icono (registro semiótico) no pueden ser asumidos por iconos ajenos a dicho registro. Por ejemplo, la selección de una parte de un círculo dividido en cuatro partes iguales representa la fracción 1/4, y recíprocamente. Pero, con la fracción numérica se puede operar y con la forma geométrica, no.

Muchos objetos matemáticos tienen representaciones icónicas que los muestran en diversos registros semióticos, porque son objetos que se utilizan o se interpretan en ellos. Pero también existen objetos matemáticos que no tienen más representaciones icónicas que la del registro de origen de la percepción racional. Por ejemplo, los polinomios se descubren y se expresan en el registro algebraico, pero no han desarrollado iconos en otros registros (son expresiones formales), posiblemente porque los usos habituales de estos objetos en Matemáticas se limitan al registro de origen, aunque sí tienen diversas representaciones simbólicas. De manera análoga ocurre con las matrices, los números combinatorios...

La interpretación de los iconos debe ir acompañada de una descripción verbal del objeto que orienta la interpretación del icono matemático y el reconocimiento del objeto por medio del icono. Las interpretaciones verbales, a veces también gestuales, expresan información implícita y no explícita en las representaciones de otros registros. Por ejemplo (3,5) es un conjunto infinito de números comprendidos... y no solo dos números...[16] Se trata de una prime-

[15] "Toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa... las representaciones de registros diferentes no presentan los mismos aspectos de un mismo contenido conceptual" (Duval, 1999, p. 67).

[16] La interpretación verbal también guía las acciones de tratamiento de las representaciones del objeto y subsana cierta carencia de información que puede existir para su desarrollo.

ra coordinación entre un icono verbal y otro icono expresado en un registro semiótico gráfico, simbólico, algebraico, numérico... (registros matemáticos) que facilita el reconocimiento del objeto en el registro matemático (más o menos conocido). Recíprocamente, la definición formal es una representación icónica del objeto que describe la funcionalidad que representa, pero solo la muestra si está construida en un registro de manifestación de la funcionalidad. Una definición verbal de un objeto matemático describe la funcionalidad, pero no la muestra. La descripción verbal debe ser reinterpretada en contextos matemáticos de manifestación del objeto. Por ejemplo, un polinomio es la suma indicada de varios monomios no semejantes: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. La reinterpretación se plantea para facilitar el reconocimiento de la funcionalidad que representa el objeto, pues es relativa a un contexto, y para facilitar la generación de representaciones mentales del objeto mediante imágenes mentales. Muchas veces, el conocimiento previo del individuo obliga a que la manifestación del objeto esté asociada a una situación particular del contexto, $P(x) = 3x^2 + x - 5$.

El objeto independiente de sus representaciones

El aprendizaje del objeto precisa la asociación de una serie de signos (iconos, símbolos, índices) con el objeto bajo la consideración de que son representantes de este.

Si dos signos representan al mismo objeto, debe existir una relación entre ellos que deriva en equivalencia, porque representan al mismo objeto. Recíprocamente, si se interpretan dos signos como equivalentes, deben representar al mismo objeto, ya que no sería lógico recibir información contradictoria de signos equivalentes.

Esta idea describe cómo llega un signo a ser considerado representante de un objeto y permite que el individuo independice el objeto de sus representaciones, ya que la equivalencia de representaciones distintas de un objeto obliga a buscar la identidad del objeto a través de estas representaciones (iconos) y no en ellas, como imágenes, pues signos distintos pero equivalentes deben dar la misma información.

La relación física entre las representaciones se plantea como medio de aprendizaje de todas las representaciones del objeto. En el caso de algún símbolo, la relación se establece de manera externa. Si los dos signos son iconos, la relación se manifiesta en forma de conversión procedimental. En todo caso, la relación entre los signos necesita la referencia al objeto para que derive en equivalencia o coordinación, es decir, relación fundamentada en la representación del objeto. La coordinación se plantea para reconocer al objeto a través de todas sus representaciones y la precede una relación o conversión entre los signos.

La conversión es la formación de la representación del objeto en el registro de llegada desde su representación en el registro de partida. La acción de conversión necesita el conocimiento previo de los registros semióticos de partida y llegada. Este conocimiento abarca los objetos elementales que configuran el registro y las reglas de formación y tratamiento de representaciones. También se debe reconocer el objeto matemático en el registro de partida o al menos interpretar las componentes del icono que lo representa.

Se describen algunos casos de conversión y coordinación entre iconos de registros semióticos distintos:

- *Conversión por correspondencia de unidades significantes,* que representan la misma funcionalidad o equivalente respecto a la particularidad de cada registro. La formación del icono en el registro de llegada tiene lugar por correspondencia de unidades significantes entre los iconos de partida y llegada, y tiene en cuenta las reglas de formación de representaciones en el registro de llegada. Por ejemplo, la expresión geométrica de una fracción numérica; la expresión gráfica-lineal de un número decimal; la expresión en fracción decimal de un decimal exacto; la interpretación numérica, algebraica o gráfica de una definición o regla matemática; las conversiones entre las representaciones de los intervalos de la recta real; la expresión matricial de un sistema de ecuaciones; el cono y su desarrollo en el plano... El grado de congruencia o correspondencia es alto porque, en general, las unidades significantes también son componentes elementales de los registros involucrados. Para alcanzar la coordinación es necesario reconocer el objeto representado por el icono de partida. La conversión o vínculo procedimental orienta la interpretación del mismo objeto a través del icono de llegada.
- *Conversión regida por la naturaleza del objeto y del registro de partida.* El icono del registro de llegada se obtiene de la interpretación y/o transformación del icono de partida que atiende a la naturaleza de sus componentes y la dinámica del registro de partida, y con el referente de la naturaleza del registro de llegada. No hay correspon-

dencia de unidades significantes ni de otras componentes del icono. Por ejemplo, la conversión a número con coma o periódico de una fracción numérica (no decimal) o de un radical, las conversiones entre las representaciones de un número complejo, la representación en la recta real de una fracción numérica... En estos casos, la coordinación se consigue por medio de un tercer icono que muestre al objeto y se coordine con los iconos iniciales, permitiendo la coordinación de estos. En concreto, las conversiones directa y recíproca entre una fracción y el número decimal que representa tienen lugar a través de acciones procedimentales asociadas al conocimiento de los registros; sin embargo, ambos iconos se coordinan a través de la medida o icono gráfico-lineal que ambos representan. Las iconos binómico y polar de un número complejo se coordinan mediante el vector asociado al número complejo. La representación gráfica-lineal de una fracción necesita la referencia al número decimal que representa o la interpretación geométrica de la fracción en una unidad geométrica lineal.

- *Conversión derivada de un proceso de prueba.*[17] El objeto que representan ambos iconos dirige la prueba de su conversión, luego la coordinación precede a la conversión. La conversión requiere una interpretación o/y tratamiento de un icono o de los dos, que conduzca de un icono a otro o de los dos a un tercero, lo que muestra su equivalencia y que ambos representan al mismo objeto. En general, la interpretación y tratamiento de los iconos se hace desde su referencia a objetos elementales del registro. Los ejemplos que se observan en la figura 3 muestran que algunas conversiones tienen lugar entre registros secundarios de uno más general.[18] La conversión manifiesta cierta correspondencia de unidades significantes, pero no hay un alto grado de congruencia o correspondencia, luego la conversión necesita cierto aprendizaje memorístico. En general, la no congruencia o no correspondencia se debe a que se trata de objetos construidos en los registros y no de objetos elementales que configuran estos registros.
- *Conversión por correspondencia de objetos matemáticos elementales,* que representan la misma funcionalidad o equivalente respecto a la

[17] Prueba (inductiva, deductiva...) para manifestar la equivalencia de dos iconos de un mismo objeto. No demostración deductiva de justificación y validación del objeto desde el conocimiento matemático previo.

[18] Por ejemplo, Duval (1995, p. 44) considera que la expresión decimal, la fraccionaria y la notación científica, son "tres registros diferentes de representación de números".

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}; \qquad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}; \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n \quad \text{(progresión aritmética)}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2; \qquad 0{,}25 = 25 \cdot 10^{-2}; \ldots$$

Figura 3. Algunos ejemplos de conversiones entre registros secundarios

> particularidad de cada registro. Son objetos elementales que configuran los registros y forman parte de la representación del objeto, pero no son unidades significantes. Este es el caso del objeto función, representado en los registros algebraico, numérico y gráfico. La conversión directa algebraica-numérica-gráfica está regida por el registro de partida atendiendo a la correspondencia de objetos elementales entre los registros de partida y llegada. Para la conversión algebraico-numérica de una función se interpretan las letras *x* y *y* que configuran la expresión de origen como variables numéricas y, en la conversión numérico-gráfica, se interpreta este par numérico como un punto del plano. La coordinación de los iconos, algebraico y gráfico parte del reconocimiento del objeto mediante el icono de partida, que orienta la misma interpretación mediante el icono de llegada. La coordinación desemboca en una correspondencia de unidades significantes a través del registro numérico, elemento que relaciona los iconos gráfico y algebraico. La conversión inversa es permitida por la conversión y coordinación directa. La conversión inversa gráfica-algebraica está dirigida por la correspondencia de unidades significantes (inclinación, corte ejes, vértice...) por medio del registro numérico y por las reglas de formación de representaciones en el registro de llegada, en concreto, requiere el conocimiento previo de la expresión del objeto en ambos registros. La coordinación parte del reconocimiento del objeto desde el icono de partida.

Cuando alguna de las representaciones es un símbolo (el nombre, una letra para representar un icono), la relación entre los signos es convenida y debe memorizarse. La equivalencia de los signos tiene lugar bajo la consideración externa de que ambos son representantes del mismo objeto. La relación entre un icono (la cantidad de dos elementos I,I) y un símbolo (dos) conduce a que el símbolo sea representante del objeto. Una vez que un símbolo es representante del objeto (dos), el propio símbolo se puede utilizar para dotar a otros símbolos de esa categoría (dos ≡ 2). Una vez definido un registro (numérico, algebraico...), aunque los signos que representan los objetos elementales que lo configuran sean representaciones de origen simbólico o indicial (respectivamente), se pueden construir, mediante ellos, iconos de objetos descubiertos en estos registros. Por ejemplo: 4^3, $a^2 + 2ab + b^2$.

Interpretación a través de los registros gráfico y geométrico

Existe una tendencia natural del individuo a utilizar los registros geométrico y gráfico para la expresión o la interpretación. Se presentan varias razones para justificar este hecho:

La funcionalidad que representa el objeto se reconoce desde los registros en los que se manifiesta; en concreto, en el registro que da origen o motiva la construcción del objeto geométrico. Por tanto, los objetos matemáticos, que son cualidades de los registros gráfico o geométrico o de objetos representados en ellos, se muestran mejor en estos registros.

La interpretación y organización primera o inmediata del mundo sensible se hace a través de cualidades como la cantidad, el tamaño o medida, la ubicación o posición referencial y la forma (muchos, grande, lejos, distinción de objetos por su forma). Estas cualidades, además de motivar la construcción de los primeros objetos matemáticos (números y formas geométricas), son referencias perceptivas y, por consiguiente, medios de interpretación del medio físico. El arraigado conocimiento de estas cualidades y su variabilidad y la capacidad de interpretación que desarrolla el individuo a través de ellas desde edad temprana convierten a estas cualidades en un potente conocimiento previo que, a falta de otro, el individuo suele utilizar para fundamentar nuevos aprendizajes o para buscar o intuir la caracterización o interpretación de los nuevos objetos. Sin embargo, este hábito puede provocar una tendencia descriptiva en la interpretación de los iconos de los objetos matemáticos de cualquier registro (no solo el geométrico y el numérico cardinal), que lleva a identificar el objeto con la imagen del icono y no con la interpretación del icono desde el registro semiótico.

Existen objetos matemáticos que no tienen origen en el registro analógico, pero tienen una interpretación o un uso en él. En el caso del objeto función, el icono analógico permite la caracterización del objeto con una forma. La constitución y ubicación de esta forma en el registro gráfico permite reconocer el objeto y también permite interpretar sus propiedades sin necesidad de transformar el icono, lo que facilita el acceso a la información. En general, al igual que el icono algebraico, el icono analógico ofrece una interpretación global de la relación y permite la valoración de los valores particulares que toma la función y su comparación. Sin embargo, el icono analógico permite cierta interpretación por medio de razonamientos y acciones perceptivas que se utilizan en la interpretación del medio físico. En cambio, la interpretación del icono algebraico necesita un mayor conocimiento matemático previo.

Otras veces, el icono analógico es una esquematización o simplificación de otras representaciones de un objeto, de ciertas propiedades o del tratamiento de un objeto en un registro. La esquematización consiste en organizar y destacar cierta información a través de menos signos y/o signos más sencillos, que orientan el reconocimiento del contenido (objeto o procedimiento). Son signos indiciales, pues señalan el contenido. Reconocido el contenido, la esquematización puede dirigir la abstracción y generalización, y facilitar así la codificación y el recuerdo. Por ejemplo, en la ecuación 1 se muestra cómo la esquematización pone de manifiesto la actuación mental que debe realizar el individuo para llevar a cabo el tratamiento del objeto.

$$\sqrt[4]{\mathbf{81}} = \mathbf{3} \Leftrightarrow \mathbf{3}^4 = \mathbf{81}; \quad \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow (b)^n = a$$

Ecuación 1. Ejemplo matemático en el que se esquematiza el procedimiento de cálculo

En general, la representación analógica permite la expresión del mismo contenido con menos signos, lo que simplifica la interpretación de la información que se transmite, porque hay que interpretar menos signos. Por ejemplo, la esquematización del enunciado de un problema de móviles, la representación sobre una recta de una función a trozos... En concreto, la representación analógica ofrece el atributo ubicación con escaso simbolismo (conocida la referencia desde la que se construye el icono analógico). A través de la ubicación, se interpreta el orden, la distancia... El icono analógico también ofrece componentes y su disposición, ciertas relaciones... Recíprocamente, estas cualidades permitirían indicar si un icono se puede caracterizar como analógico.

Las razones anteriores llevan a indicar que los iconos analógicos facilitan la creación de representaciones internas a través de imágenes mentales, lo que facilita la codificación y el recuerdo del objeto.

La actuación de los operadores no siempre tiene representación analógica, como el operador gradiente, solo se puede mostrar analógicamente una situación inicial y la situación final tras la actuación del operador. Se reconoce la acción del operador a través del cambio que se produce de la situación inicial a la final. El caso particular de la división de longitudes de segmentos, presente en la definición de objetos matemáticos como razones trigonométricas, pendiente de una recta, la derivada de una función en un punto... puede ser representado por el teorema de la altura, el teorema de Thales, la semejanza de triángulos, a través de la reducción a la unidad.

En general, a medida que disminuye la posibilidad de cuantificar (cantidades o relaciones), ubicar el objeto o dotarlo de un contorno, disminuye la posibilidad de representación analógica de un objeto.

El uso y las relaciones de los objetos matemáticos

El reconocimiento del objeto como entidad que es, o representa, una funcionalidad requiere un uso funcional y no solo un uso representacional o instrumental centrado en el tratamiento de las representaciones. El uso funcional permite u orienta la percepción racional de la funcionalidad que representa al objeto, porque está regido por ella. La funcionalidad que representa al objeto dirige el uso particular de este. Por ejemplo, este uso se puede observar mediante la resolución de problemas, tanto de contexto matemático como de contexto de la vida real. El objeto matemático se utiliza para interpretar u organizar las situaciones que propone el enunciado del problema.

El uso funcional consiste en que el objeto actúa en un contexto y situación desde su posición organizadora o interpretativa, obteniendo una interpretación u organización de esta. La organización o interpretación de una situación debe permitir percibir o reconocer el uso particular del objeto desde el cual se orienta o afianza el reconocimiento de la funcionalidad que permite ese uso. Por ejemplo, el uso del porcentaje para llevar a cabo descuentos o recargos.

Las relaciones que se puedan establecer entre el objeto matemático y otros del conocimiento del individuo pueden orientar el reconocimiento de la funcionalidad que representa el objeto. El reconocimiento de un objeto como miembro de una clase, por tener características (de expresión, propiedades, uso) comparables o semejantes a los objetos que configuran la clase, conduce a identificar la funcionalidad que representa el objeto con la de los objetos de la clase (un ortoedro es un prisma, un porcentaje es un operador fraccionario...) o a interpretar el objeto por medio de ellos. Sin embargo, el razonamiento por analogía es solo un primer acercamiento al reconocimiento o interpretación del objeto.

CONCLUSIÓN

Como conclusión, se utilizan las ideas anteriores para interpretar la construcción personal de la relación triádica signo-objeto-significado y se dan unas orientaciones docentes fruto de estas ideas.

Relación triádica de conocimiento del objeto: signo-objeto-significado

El aprendizaje de un objeto supone el desarrollo de una relación triádica entre los elementos: signo, objeto y significado. Con el término signo, se hace referencia al aspecto representacional que configura el objeto, y el significado es la información sobre el objeto que tiene el individuo y que le permite interpretarlo en un contexto y situación. La relación triádica signo-objeto-significado concentra el conocimiento que se tiene sobre el objeto matemático. Se trata de reconocer la función organizativa o interpretativa del objeto matemático, asociarla a unas representaciones y un significado mediante el uso de la funcionalidad, que es el objeto en diversas situaciones.

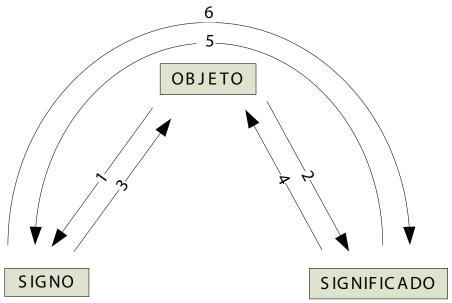

Figura 4. Relaciones en la tríada signo-objeto-significado

En lo que sigue, se interpreta esta relación triádica desde unas relaciones diádicas entre sus elementos. La figura 4 expresa estas relaciones.

Las relaciones 1 y 2 se establecen desde la construcción institucional del objeto matemático (también desde un estadio de conocimiento personal sobre el objeto).

1. Semiosis institucional, cultural e histórica asociada a la construcción del objeto. El individuo asocia un aspecto representacional con el objeto desde el conocimiento que tiene sobre él.
2. El significado institucional del objeto comprende su expresión discriminatoria, su uso funcional y sus relaciones. El individuo asocia un significado al objeto desde el conocimiento que tiene sobre él.

Las relaciones 3 y 4 se justifican desde el aprendizaje o reconocimiento del objeto:

3. El signo y el contexto de representación permiten el reconocimiento del objeto.
4. La expresión discriminatoria del objeto matemático, su uso funcional y sus relaciones son ejes de desarrollo del significado personal sobre el objeto y son medios de reconocimiento de la funcionalidad que este representa.

El significado del objeto se desarrolla a través de la experiencia con el objeto, pero esta experiencia es permitida por el signo, lo que fuerza la tríada indisoluble signo-objeto-significado. Las relaciones 5 y 6 caracterizan la articulación triádica.

5. Significado-objeto-signo. Cualquier significado asociado a un objeto debe poder expresarse o interpretarse mediante alguna de sus representaciones. Un significado o uso concreto del objeto, evocado por el contexto y la situación de uso, puede requerir un signo específico como representante del objeto.
6. Signo-objeto-significado. Un signo adquiere el significado del objeto que representa. El signo en interacción con el contexto dirige la interpretación o significado del objeto.

Orientaciones docentes

Las ideas presentadas sobre el aprendizaje y comprensión de los objetos matemáticos pueden fundamentar el desarrollo de su docencia. Se trata de reconocer la funcionalidad o función organizativa o interpretativa que es el objeto matemático. En el desarrollo del artículo, se ha explicado que esto puede tener lugar a través de los iconos que representan al objeto, su uso en situaciones diversas y las relaciones que establece el individuo entre el objeto y otros de su conocimiento previo. Aquí se quieren destacar dos intervenciones docentes importantes para que el individuo pueda reconocer el objeto a través de sus iconos. Por una parte, se destaca la necesidad de una descripción verbal del objeto matemático, que dirija la interpretación de sus iconos en los registros semióticos y el reconocimiento del objeto por medio de ellos. Por otra, se observa la necesidad de ofrecer ejemplos particulares de manifestación del objeto. Estos ejemplos particulares relacionan el objeto con el conocimiento previo del individuo. Los ejemplos se constituyen en contextos o registros semióticos conocidos por el individuo, lo que facilita la percepción del objeto matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blázquez, S., S. N. Gatica, T. Ortega y J. Benegas (2006), "Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad", *RELIME*, vol. 9, núm. 2, pp. 189-210, México, Clame.

Dreyfus, T. (1991), "Advanced Mathematical Thinking", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Londres, Kluwer Academic Publishers, pp. 25-41.

Duval, R. (1995), *Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Berna, Peter Lang. (Traducción al castellano: *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (1999), Cali, Colombia, Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática).

Marafioti, R. (2004), *Charles S. Peirce: el éxtasis de los signos,* Buenos Aires, Biblos.

Pecharromán, C. (2013), "Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 31, núm. 3, pp. 121-134.

Peirce, C. S. (1987), *Obra lógico-semiótica,* Madrid, Taurus.

Puig, L. (2003), "Signos, textos y sistemas matemáticos de signos", en E. Filloy (ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual,* México, Fondo de Cultura Económica/CINVESTAV, pp. 174-186. Recuperado de http://www.grupoklein.cl/biblioteca/BD/signos.%20puig.pdf (1-13).

DATOS DE LA AUTORA

Cristina Pecharromán
Universidad de Valladolid, España
cpecharromang@yahoo.es
pecharroman@am.uva.es