

Identificación de estrategias en un juego bipersonal entre estudiantes universitarios

Identification of Strategies Used by Undergraduate Students in a Two-player Game

Angelina G. González Peralta¹
Juan Gabriel Molina Zavaleta²
Mario Sánchez Aguilar³

Resumen. El propósito de este manuscrito es ampliar nuestro conocimiento acerca de las potencialidades que ofrece el uso de juegos de estrategia, para promover habilidades útiles en la resolución de problemas. Se reportan los resultados de un estudio a nivel universitario sobre la práctica del juego bipersonal "círculo de monedas". Para ello se analizaron las partidas de cuatro jugadores. Los principales resultados del artículo son: 1) se identifican estrategias utilizadas por los estudiantes al intentar ganar, 2) se identifican las condiciones bajo las cuales surgen dichas estrategias y 3) se argumenta cómo la práctica de juegos de estrategia podría favorecer el desarrollo de heurísticas útiles en la resolución de problemas.

Palabras clave: *actividades lúdicas, enseñanza universitaria, estrategias, juegos educativos, matemática educativa.*

Fecha de recepción: 9 de mayo de 2016. **Fecha de aceptación:** 4 de marzo de 2017.

¹ Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Baja California. México/Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México. Ima.agp@gmail.com

² Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México. jmolina@ipn.mx

³ Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México. mosanchez@ipn.mx

Abstract. The purpose of this manuscript is to increase our knowledge about the potential offered by the use of strategy games to promote useful skills in problem solving. We report the results of a study conducted at the undergraduate, where students engaged in a two-player game called “circle of coins”. We analyze the games played by four students. The main contributions include are: 1) identifying the specific strategies used by each of the players to try to win the games and 2) the conditions under which these strategies arose. In addition, 3) we argued that the practice of strategy games could encourage the development of heuristics useful in solving mathematical problems.

Keywords: *playful activities, undergraduate education, strategies, educational games, mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

La inclusión de juegos como un medio en la enseñanza de las matemáticas se ha utilizado en distintos niveles educativos. Averiguar si el uso de actividades recreativas representa una diferencia (positiva o negativa) en aspectos afectivos, actitudinales, en el desarrollo de estrategias y habilidades y en la construcción y consolidación de conocimientos respecto a la enseñanza tradicional por sí sola, se ha convertido en tema de interés para educadores e investigadores en matemática educativa. González, Molina y Sánchez (2014) identifican que, particularmente en el nivel superior, existen pocas investigaciones empíricas relativas al uso de juegos en la clase de matemáticas (e.g. Bright, 1980; Kraus, 1982; Afari, Aldridge y Fraser, 2012); son más comunes los estudios en el nivel escolar básico (e.g. Bragg, 2012).

Para los fines de esta investigación son de particular interés los resultados relativos a juegos de estrategia y el impacto que tienen en las estrategias de resolución de problemas. En este sentido, Krulik y Wilderman (1976), Kraus (1982), Butler (1988), Oldfield (1991a, 1991b), De Guzmán (1995), Corbalán (1996) y Olfos y Villagrán (2001) coinciden en que las similitudes de los juegos de estrategia y los problemas matemáticos pueden resultar provechosas para el desarrollo de estrategias utilizables en la resolución de problemas; Gairín (2003) explora la utilidad de juegos de estrategia para iniciarse en el campo de las demostraciones matemáticas y De Guzmán (1984) puntualiza que no todos los juegos se prestan para el aprovechamiento didáctico, puesto que algunos son simplemente

acertijos que no admiten un esquema de pensamiento que conduzca a un método. Sin embargo, ninguno de los autores establece bajo qué condiciones emergen estrategias que enriquezcan el proceso de resolución de problemas y tampoco aportan evidencia de efectos negativos del uso de juegos en la clase de matemáticas.

Con el fin de analizar el uso de juegos en el nivel universitario con relación a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se llevó a cabo un estudio empírico que gira en torno a la práctica de juegos de estrategia; de manera más particular, se indagaron las estrategias utilizadas por estudiantes universitarios al intentar ganar el juego “círculo de monedas”. En el presente artículo se reportan los detalles de la fase experimental de este estudio y se discuten algunas implicaciones de los resultados obtenidos. Como eje conductor de la investigación se plantean tres preguntas que se responderán al finalizar este manuscrito:

1. ¿Qué estrategias utilizan estos estudiantes al intentar ganar el juego círculo de monedas?
2. ¿Bajo qué condiciones surgen estas estrategias?
3. ¿Practicar juegos de estrategia favorece el desarrollo de heurísticas identificadas en la literatura como útiles en la resolución de problemas?

En el manuscrito encontrará 1) marco conceptual, 2) descripción del juego “círculo de monedas”, 3) método, 4) datos obtenidos de la reconstrucción de las partidas, 5) resultados y 6) discusión de resultados, alcances y limitaciones del estudio.

MARCO CONCEPTUAL

Una de las ideas centrales en este trabajo fue identificar las estrategias que usaron los estudiantes al jugar “círculo de monedas”; la importancia radica en que las estrategias utilizadas por los estudiantes pueden ser advertidas a través de sus jugadas y éstas pudieran reflejar situaciones que ocurren no sólo cuando los estudiantes están participando en determinado juego sino también cuando están resolviendo un problema.

Gairín (1990), al describir las principales diferencias entre un juego de conocimiento y un juego de estrategia, señala que para ganar un juego de conocimiento el dominio de conceptos o algoritmos matemáticos es primordial y, para

ganar un juego de estrategia son las habilidades, destrezas, razonamientos y el control sobre éstas lo que determina quién ganará.

Existen similitudes entre las estrategias utilizadas para enfrentarse en un juego (de estrategia) y las señaladas por Polya en la resolución de problemas. En la Tabla 1 se comparan las fases descritas por Olfos y Villagrán (2001) para enfrentarse a un juego de estrategia con las cuatro fases del modelo de Polya (1945) en la resolución de problemas.

Tabla 1. Cuatro fases de Polya (1945) para resolución de problemas y cuatro fases de Olfos y Villagrán (2001) para enfrentarse a un juego de estrategia.

	Cuatro fases de Polya (1945) para enfrentarse a un problema matemático	Cuatro fases de Olfos y Villagrán (2001) para enfrentarse a un juego de estrategia
Fase 1	Comprender el problema.	Comprensión del juego o familiarización.
Fase 2	Concebir un plan.	Elaboración de un plan para ganar.
Fase 3	Ejecutar el plan.	Poner a prueba las estrategias.
Fase 4	Visión retrospectiva.	Comprobar si la estrategia es general: reflexionar sobre el proceso.

Es evidente la importancia de la fase 1 del modelo de Polya (1945): si las reglas del juego no quedan claras o, análogamente, no se comprende el problema a resolver, intentar deambular por las siguientes fases resulta infructuoso. Concebir, ejecutar y adecuar un plan permitirá al jugador continuar en la partida pero una visión retrospectiva podría permitirle determinar una estrategia general que lo conduzca a ganar siempre que sea posible.

Es deseable fomentar estas estrategias entre los estudiantes. De acuerdo con Elia, van den Heuvel-Panhuizen y Kolovou (2009), la resolución de problemas es una de las actividades cognitivas más significativas y el éxito en la resolución de problemas matemáticos está positivamente relacionado con el dominio de estrategias.

Aunque el juego círculo de monedas no aporta conocimientos de contenidos, argumentaremos en este documento que su práctica fomenta estrategias que se sugiere son útiles para mejorar las habilidades de estudiantes al resolver problemas (Ver Bureau of Exceptional Education and Student Services, 2010); estas estrategias también contribuyen a los estándares de procesos establecidos por la NCTM (2000) relativos a resolución de problemas, razonamiento y pruebas.

Estos comportamientos mencionados son semejantes a lo que Cuoco, Goldenberg y Mark (1996) denominan *hábitos de la mente*, los cuales son comportamientos que sugieren enseñar a los estudiantes para atender situaciones en la escuela e incluso más allá, en su vida diaria pues pueden ser aplicados en diferentes contextos. En Levasseur y Cuoco (2003) señalan que estos modos de pensar o hábitos de la mente existen de tal manera que trascienden el contenido del conocimiento y que son admitidos por matemáticos como facetas esenciales en su trabajo. Levasseur y Cuoco (2003) sugieren que los profesores pueden facilitar el desarrollo en estudiantes de estos hábitos al hacerse explícitos a través de estimular la reflexión en éstos cuando surja la oportunidad. Identificar las estrategias a través de la reconstrucción de jugadas brinda la oportunidad de hacer explícitos estos hábitos empleados en el juego para reflexionar sobre ellos.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO “CÍRCULO DE MONEDAS”

El juego “círculo de monedas” es un juego bipersonal en el que no es posible que una partida concluya con un empate.

En este juego, tal como se muestra en la Figura 1, debe colocarse cualquier número de monedas o fichas dispuestas en un círculo, los jugadores se turnan para sacar una o dos fichas, si eligen tomar dos fichas éstas deben estar una junto a la otra, sin espacios vacíos entre ellas. El ganador es aquel que saca la última ficha (Gardner, 1988).

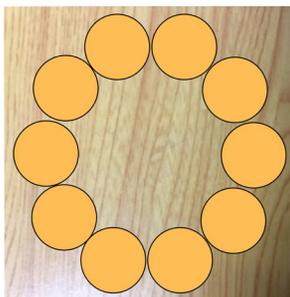


Figura 1. Configuración inicial del juego círculo de monedas

Gardner (1995) explica que el jugador que realiza el segundo movimiento puede ganar siempre e indica cómo es que puede hacerlo:

Después de que el jugador que realizó el primer movimiento ha tomado una o dos monedas, las monedas restantes forman una cadena curvada con dos extremos. Si esta cadena contiene un número impar de monedas, el jugador que realiza el segundo movimiento toma la moneda central. Si contiene un número par, toma las dos monedas centrales. En ambos casos deja dos cadenas separadas de igual longitud. A partir de este punto, cualquier movimiento que el oponente realice en una cadena deberá ser duplicado por el segundo jugador tomando una o dos monedas de la otra cadena (Gardner, 1995: 212, nuestra traducción).

MÉTODO

En esta sección se describen los sujetos de estudio y el contexto de la aplicación; además se detallan las características de la recolección, organización y análisis de datos.

Se reportan los resultados de dos parejas de jugadores, todos ellos estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC). Las características de los cuatro jugadores se detallan en la Tabla 2, en la última columna se define una identificación para la relatoría.

Tabla 2. Sexo, edad e identificación de los jugadores.

Equipo	Jugador	Sexo	Edad	Identificación del jugador
1	A	M	25	1A
	B	M	18	1B
2	A	M	18	2A
	B	M	19	2B

CONTEXTO Y RECOLECCIÓN DE DATOS

La sesión de juegos se llevó a cabo en la Facultad de Ciencias, UABC. Se realizó un sábado para evitar interrupciones y contar con aulas separadas para cada bina. Se explicó la dinámica a seguir, las reglas del juego y el rol de cada uno de los miembros. Cuando los estudiantes señalaron que las reglas estaban claras,

se dio inicio a la sesión que consistiría en ocho partidas en las que un jugador realizaría el primer movimiento de las partidas pares y el otro jugador iniciaría las partidas impares.

Se utilizó un tablero numerado y monedas de chocolate de cuatro centímetros de diámetro que favorecieran el análisis posterior del vídeo para observar claramente los movimientos de los jugadores, Figura 2.

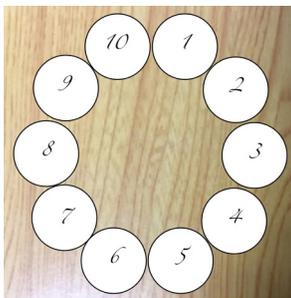


Figura 2. Tablero utilizado para jugar círculo de monedas

La recolección de datos se llevó a cabo a través de videograbación y registro escrito por parte de los jugadores. Para grabar la sesión se utilizaron dos dispositivos para prevenir fallas técnicas, se colocó una mesa para llevar a cabo la partida y se situó estratégicamente una computadora que pudiera grabar el desarrollo de la sesión, enfocándose en los movimientos de los jugadores. Se optó por grabar con una computadora, puesto que para la toma fija que se buscaba representaba algunas ventajas, por ejemplo una amplia capacidad de memoria y la posibilidad de permanecer conectada a la corriente eléctrica evitando la descarga inesperada. Un colaborador técnico llevó a cabo una grabación más focalizada con celular o cámara de video, además se encargó de proveer a los estudiantes los tableros de juego y de registrar la duración de cada partida y el ganador de la misma.

Para registrar las observaciones de los jugadores, se les otorgaron dos cuadernillos (uno para cada juego), conformados por ocho hojas de distintos colores (una para cada partida). Se indicó que durante cada partida debían anotar sus observaciones e ideas en la parte delantera de la hoja y, al finalizar cada partida, debían preguntarse “¿Sé cómo ganar?” y anotar su respuesta detallada en la parte trasera de la hoja correspondiente. El código de colores se implementó para relacionar más fácilmente las anotaciones con la videograbación.

ORGANIZACIÓN DE DATOS Y RECONSTRUCCIÓN DE JUGADAS

Los datos fueron sometidos a un análisis cualitativo. Antes de iniciar con el análisis de datos se organizó la información obtenida por las diferentes fuentes. En la Figura 3 se muestra la duración de las partidas de círculo de monedas y en la Tabla 3 los detalles relativos a qué jugador inicia la partida, cuántos movimientos hace y quién resulta ganador.

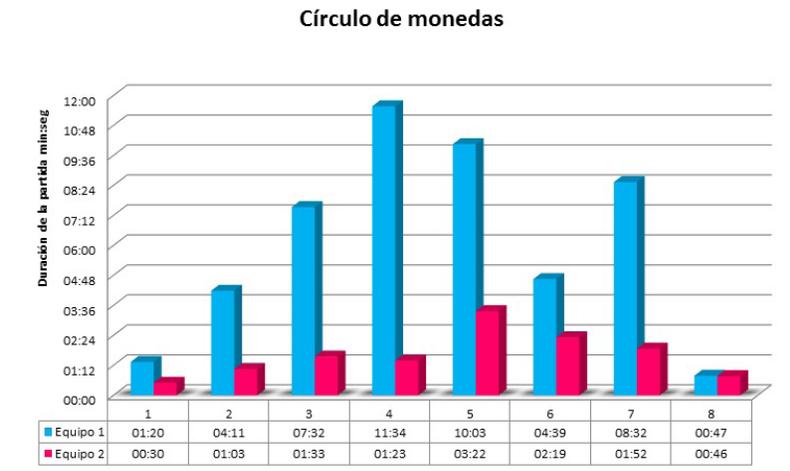


Figura 3. Duración de las partidas de círculo de monedas.

También se utilizó un sistema de representación con el propósito de convertir cada registro en un dato. Con el apoyo de las videograbaciones se llevó a cabo una reconstrucción de las partidas con el fin de visualizar los movimientos de los jugadores, observar patrones y la evolución de las jugadas. Para facilitar la revisión de las reconstrucciones, las imágenes capturadas han sido etiquetadas de la forma partida.movimiento.jugador.

RECONSTRUCCIÓN DE UNA PARTIDA DE CÍRCULO DE MONEDAS

Retomando el concepto de cadena utilizado por Gardner (1995) para referirse a las distribuciones que pueden presentarse en el círculo de monedas, se denominará cadena a un conjunto de monedas sin espacios vacíos entre ellas y en

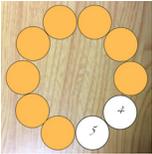
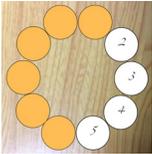
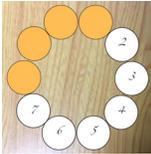
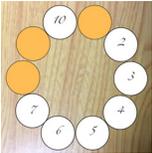
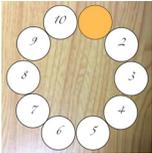
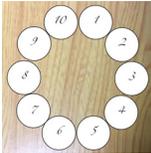
Tabla 3. Jugador que inicia, jugador que gana y número de movimientos.

Círculo de monedas				
Equipo	Partida	Inicia	Movimientos	Ganador
1	1	1A	7	1A
	2	1B	8	1A
	3	1A	8	1B
	4	1B	9	1B
	5	1A	10	1B
	6	1B	7	1B
	7	1A	7	1A
	8	1B	3, no concluyen	Asumen que ganará 1B
2	1	2A	6	2B
	2	2B	7	2B
	3	2B	8	2A
	4	2A	6	2B
	5	2B	9	2B
	6	2A	8	2B
	7	2B	7	2B
	8	2A	8	2B

el que pueden identificarse dos extremos únicos; una moneda aislada es en sí misma una cadena, además el término *monedas de frontera* se referirá a aquellas que al ser retiradas no generan una nueva cadena.

Para especificar el número de cadenas en el círculo y cuántas monedas hay en cada una de ellas se hablará de configuraciones. En la notación se utilizarán guiones para separar la cantidad de monedas en cada cadena. Así, por ejemplo, la configuración (2-2-1) indica que se tienen tres cadenas, dos de dos monedas y una de sólo una moneda, en tanto la configuración (5-2) señala que hay dos cadenas, una de cinco monedas y otra de dos. En la Tabla 4 se ejemplifica una reconstrucción.

Tabla 4. Reconstrucción de círculo de monedas. Partida 1, equipo 2.

 <p>1.1.2A 2A inicia la partida retirando 2 monedas (4,5)</p>	 <p>1.2.2B 2B retira 2 monedas de frontera (2,3)</p>	 <p>1.3.2A 2A retira 2 monedas de frontera (6,7)</p>
 <p>1.4.2B 2B por primera vez retira una sola moneda y ésta no es de frontera. Su movimiento da oportunidad de ganar a 2A. Retirar las monedas 9 y 10 habría garantizado a 2B ganar en su próximo movimiento.</p>	 <p>1.5.2A 2A comete un error y quita las monedas 8 y 9. Quitar sólo la moneda 9 aseguraba su victoria.</p>	 <p>1.6.2B.fin 2B retira la última moneda y gana.</p>

ANÁLISIS DE DATOS

Tras tener la reconstrucción de las partidas de círculo de monedas se hizo una exploración de las imágenes que permitiera ver paso a paso cómo evolucionó el juego; se realizó un análisis de *atrás hacia adelante* para determinar en qué momento de la partida los jugadores podían determinar cómo ganar. Cuando surgían hipótesis acerca de la estrategia utilizada por el jugador, se recurría a las otras fuentes de datos para confirmarlas o descartarlas.

DATOS OBTENIDOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DE LAS PARTIDAS

Se comenzará con un análisis general con base en la información presentada en las tablas 2 y 3 y posteriormente se analizarán de forma concreta las jugadas.

En la figura 3 se evidencia cómo en una primera etapa las partidas duraron poco tiempo pero posteriormente tuvieron incrementos significativos en su duración y una evolución interesante. Por ejemplo en el caso del equipo 1, la diferencia en la duración de la partida 2 respecto a la partida 1 fue de 2'51" (dos minutos cincuenta y un segundos), de la partida 2 a la partida 3 fueron 3'21", de la 3 a la 4 fueron 4'02" y después comenzó un descenso en el tiempo invertido; de la partida 4 a la partida 5 disminuyó 1'31" respecto a la anterior, de la 5 a la 6 disminuyó 5'24" y, aunque hubo un incremento de la partida 6 a la 7, la duración de la última partida fue de tan sólo 47 segundos puesto que los jugadores decidieron detener el juego al reconocer que la configuración de monedas en el tablero indicaba la derrota de uno de los jugadores.

¿Qué ocurrió en las etapas del juego descritas en el párrafo anterior? Considerando la información de la tabla 2 y el caso del equipo 1; la primera partida duró 1'20" y la segunda 4'11", el jugador 1B perdió en ambas; esta situación podría ser resultado de que ambos jugadores estaban comprendiendo el juego y podría significar la aparición de una primera estrategia: la prueba y el error. La estrategia *prueba y error* consiste en probar una idea y ver si ésta funciona, se enfoca en el éxito de la partida sin procurar generalizar en primera instancia, es una estrategia fácil de implementar puesto que basta con respetar las reglas del juego para proceder.

El incremento del tiempo que ocurrió en la partida 2 podría indicar que el jugador 1B había comprendido el juego y se volvió un oponente más fuerte, por ello tardaron más en derrotarlo. La duración de las partidas 3 a 7 sugiere que hubo un equilibrio en el nivel de juego de ambos contendientes, el jugador 1B ganó las cuatro partidas siguientes y perdió la séptima. En la octava partida el juego fue suspendido por los contendientes pues declararon saber quién ganaría; esto fue interpretado como una señal de que los estudiantes manejaban la estrategia *pensar hacia atrás*: esta estrategia se caracteriza por suponer el juego terminado y pensar qué configuración o configuraciones previas conducen a este resultado.

En el caso del equipo 2 ocurre una situación semejante en términos generales pero a menor escala, se inició con partidas breves, hay un ligero incremento de tiempo y posteriormente un descenso. El jugador 2A sólo ganó una de las 8 partidas; el poco tiempo de duración de las partidas del equipo 2 en comparación con la duración de las partidas del equipo 1, podría significar que no se logró un equilibrio en el desempeño de los jugadores. Quizá las estrategias utilizadas por el jugador 2A no representaron un desafío para su oponente. Un posible

efecto de enfrentar un jugador fuerte a uno débil es que quizá el jugador más fuerte no requeriría una gran colección de estrategias para ganar, lo cual podría inhibir el surgimiento de las mismas.

A continuación se discuten las jugadas de forma concreta. Para estudiar la reconstrucción de las jugadas se recurrió a un análisis de atrás hacia adelante. Ganar cuando sólo queda una moneda en el círculo es trivial porque bastará con que el jugador en turno la retire. Cuando sólo quedan dos monedas en cadena esto podría parecer igual de trivial, sin embargo, el jugador podría cometer el error de tomar sólo una y otorgar la victoria al oponente. Si se tienen dos monedas separadas el jugador en turno está destinado a perder la partida puesto que deberá tomar una, dejando la última moneda al oponente.

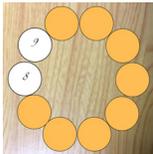
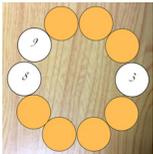
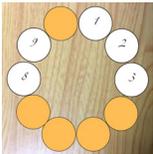
Cuando tres monedas quedan en el círculo, éstas pueden estar distribuidas en una, dos o tres cadenas, es decir, las posibles configuraciones son (3), (2-1) y (1-1-1). La configuración (1-1-1) garantiza que, aun sin esfuerzo, el jugador que recibe el tablero con esta configuración ganará en su próximo movimiento, esta configuración no aparece en ninguna de las partidas analizadas. Al tener una cadena de tres monedas, el único movimiento que asegura la victoria es quitar la moneda central. Esta situación se presenta en las partidas 5 y 7 del equipo 1, en ambos casos los estudiantes juegan de manera óptima retirando la moneda central. La configuración (2-1), también tiene un solo movimiento que conduce a una victoria segura, consiste en retirar una moneda de la cadena que contiene dos monedas para dejar la configuración (1-1). En la tabla 3 puede observarse cómo el jugador 2A cometió un error al recibir la configuración (2-1), retiró una moneda aislada y esto lo condujo a la derrota; su contrincante escribió en el cuadernillo de anotaciones: “no estaba seguro si ganaría, mi oponente pudo ganar y no lo hizo”. Esto sugiere que el jugador 2B identificó el movimiento que conduce a la victoria al recibir la configuración (2-1). En la tercera partida, el jugador 2A al enfrentarse nuevamente a la misma configuración efectuó el movimiento idóneo y además identificó “en mi turno debo dejar dos fichas separadas de otras dos”. Al parecer los jugadores habían identificado un patrón, este hecho podría ser el resultado de la estrategia conocida como *búsqueda de patrones*, ésta consiste en identificar una estructura que se repita en el juego e intentar encontrar una solución a partir de dicha estructura.

La variedad de posibles configuraciones para 4 o más monedas es bastante amplia, lo que hace aún más extenso el análisis de cada una de ellas de acuerdo a la sesión de juegos que se estudia, los detalles para cada configuración pueden consultarse en González (2014), aquí sólo se incluyen las jugadas y

configuraciones que resultan significativas para la discusión de resultados. Esta amplitud de las posibles configuraciones cuando están involucradas 4 o más monedas podría favorecer que una de las primeras estrategias usadas por los jugadores haya sido la *prueba y el error* para disminuir la complejidad del juego a un número de monedas que sea dominado por el estudiante. Esta situación también podría ser la manifestación de otra estrategia, *la simplificación de tareas difíciles*, que se caracteriza por conducir el tablero a configuraciones que el jugador pueda enfrentar más fácilmente.

Una situación singular ocurrió en la octava partida del equipo 1 (Tabla 4); al llegar a la configuración (4-1) los jugadores indicaron que no tenía sentido continuar porque el jugador que había dejado el tablero en esta configuración había asegurado su victoria. Este hecho se considera una manifestación de las estrategias *pensar hacia atrás* e *identificación de patrones*, lo que se describe a continuación apoya esta suposición, Tabla 5.

Tabla 5. Reconstrucción de círculo de monedas. Partida 8, equipo 1.

 <p>8.1.1B 1B inicia la partida retirando dos monedas (8,9)</p>	 <p>8.2.1A 1A retira la moneda 3</p>	 <p>8.3.1B.fin 1B retira dos monedas de frontera (1,2)</p>
--	---	---

Cuando el tablero se encontraba como se muestra en la toma 8.3.1B, los jugadores detuvieron la partida porque sabían que si jugaban correctamente el jugador 1B ganaría pero ¿cuándo descubrieron esto? ¿La aparición de la configuración (4-1) ha sido inducida por los jugadores de manera intencional? Al revisar los cuadernillos de anotaciones del equipo 1, el jugador 1A al finalizar la primera partida escribió “tengo una idea de cómo hacer perder al jugador contrario. Es decir, aislar una y otras dejarlas en pares”. Cuando se analiza la reconstrucción de la primera partida, esta descripción de “una aislada y otras en pares” sólo coincide con la configuración (4-1), más adelante, en la hoja correspondiente a la cuarta partida, 1A escribió “se hicieron dos movimientos y quedaron

pares y una aislada”, al ver la reconstrucción de las imágenes su descripción coincide con la configuración (6-1) esto muestra que el jugador 1A tenía una hipótesis que había probado para la configuración (4-1) y esperaba validar para la configuración (6-1). Sin embargo, no ganó esta partida y desechó su hipótesis.

En el cuadernillo de anotaciones del jugador 1B, en la hoja correspondiente a la tercera partida escribió en el encabezado de la parte delantera “4-1” lo cual sugiere que al iniciar esta partida sabía que dejar el tablero en esta configuración lo conduciría a la victoria. Además, el jugador agregó: “recreé cada posibilidad en mi mente y al ver que mi oponente sabía qué estrategia realizar, busqué tener en cuenta las uniones de monedas.” Por una parte aquí se manifiesta la estrategia *pensar hacia adelante* la cual consiste en predecir los posibles movimientos del oponente y actuar con base en esta predicción y por otra parte el estudiante reconoce la capacidad de su oponente y esto lo obliga a esforzarse más en sus jugadas.

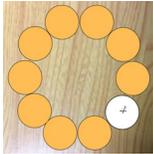
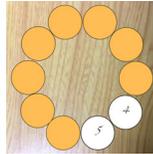
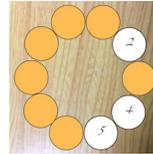
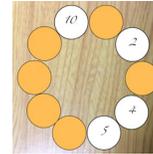
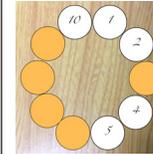
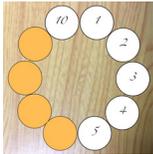
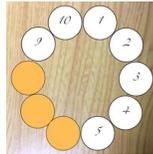
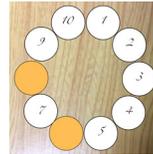
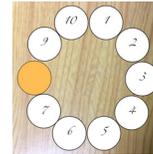
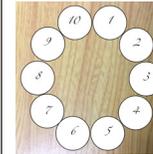
Pese a que ambos integrantes del equipo 1 mostraron tener idea de que dejar el tablero en esta configuración les permitiría ganar, en la partida 5 el jugador 1A hace un movimiento que deja el tablero en configuración (4-1), sin embargo, perdió la partida. Para analizar el porqué de esta eventualidad se incluyó la reconstrucción en la Tabla 6.

Aunque el jugador 1A tenía identificada la configuración (4-1) como favorable para aquel que la propicia, cometió un error en los movimientos sucesivos y perdió la partida, en el cuadernillo de anotaciones y en la videograbación no hay evidencia de que el jugador haya reflexionado acerca de su error, sin embargo, en partidas sucesivas continuó confiando en esta configuración e incluso aceptó su derrota en la partida 8, cuando su contrincante lo acorraló con la configuración (4-1) y ambos decidieron detener el juego.

Conforme el número de monedas disminuye resulta más sencillo generar hipótesis y tomar decisiones acerca de qué moneda o par de monedas quitar del tablero. Pese a que al tener seis o siete monedas los jugadores del equipo 1 procuraron llevar el juego a la configuración (4-1), es claro que aún no tienen una amplia gama de estrategias para seis o más monedas. Los cuadernillos de anotaciones del equipo 2 muestran que los jugadores estaban conscientes de que existe la forma de determinar cómo ganar pese a que no la habían descubierto aún.

En la quinta partida, el jugador 2A escribió “Me di cuenta que el juego se decide al quedar siete fichas”, al finalizar la sexta partida escribió “Dejaré cuatro

Tabla 6. Reconstrucción de círculo de monedas. Partida 5, equipo 1.

 <p>5.1.1A 1A retira la moneda 4</p>	 <p>5.2.1B 1B retira la moneda 5</p>	 <p>5.3.1A 1A retira la moneda 2</p>	 <p>5.4.1B 1B retira la moneda 10</p>	 <p>5.5.1A 1A retira la 1 dejando el tablero en configuración (4-1)</p>
 <p>5.6.1B 1B retira la moneda 3</p>	 <p>5.7.1A 1A retira la moneda 9 y pierde el control de la partida. Retirar las monedas 7 y 8 habría asegurado su victoria</p>	 <p>5.8.1B 1B retira la moneda 7 dejando dos cadenas de una sola moneda y garantizando su triunfo</p>	 <p>5.9.1A 1A retira la moneda 6</p>	 <p>5.10.1B.fin 1B retira la moneda 8 y gana la partida</p>

fichas y tres separadas, pero para ganar necesitas ser segundo”, en la hoja correspondiente a la octava partida se lee “Traté de ver movimientos en siete fichas pero hay muchas combinaciones” y al concluir agrega “Sólo estoy seguro de una manera de ganar, dejar dos y dos fichas”. Esto es una muestra de cómo el jugador intentó validar sus hipótesis para siete fichas y de que identificó que dejar una configuración (2-2) a su oponente le aseguraría la victoria.

En el caso del jugador 2B, al finalizar la quinta partida indicó “No podría describir una solución general, me baso en calcular variantes”, en la sexta partida escribió “Al yo sacar una y él sacar dos del otro lado, queda una situación de tres de un lado y cuatro del otro y siempre, aunque esta vez cometí un error,

la estrategia me hará ganar”. El jugador 2B había avanzado un poco más en la construcción de estrategias ganadoras y en el caso de siete monedas había identificado que recibir la configuración (4-3) le permitiría dominar el juego. En la octava partida escribe “No descubrí un algoritmo, mi estrategia era llevar el juego a posiciones nuevas para ganar analizando variantes. La única posición que podría decir con certeza que ganas es cuando hay dos y dos separadas y le toca al otro”. Al igual que el jugador 2A, el jugador 2B identificó claramente las ventajas de dejar el tablero en configuración (2-2) a su rival.

El análisis de jugadas y anotaciones sugiere que, aunque los estudiantes logran visualizar algunas variantes en el juego, resulta más complicado llevarlas a cabo cuando hay una sola cadena en el tablero.

RESULTADOS

Como se planteó en la introducción de este manuscrito, a partir de la reconstrucción de jugadas y el análisis de las mismas, se responderán las siguientes preguntas:

1. ¿Qué estrategias utilizan estos estudiantes al intentar ganar el juego círculo de monedas?
2. ¿Bajo qué condiciones surgen estas estrategias?
3. ¿Practicar juegos de estrategia favorece el desarrollo de heurísticas identificadas en la literatura como útiles en la resolución de problemas?

¿QUÉ ESTRATEGIAS UTILIZAN ESTOS ESTUDIANTES AL INTENTAR GANAR EL JUEGO CÍRCULO DE MONEDAS?

Las estrategias identificadas son 1) prueba y error, 2) búsqueda de patrones, 3) simplificación de tareas difíciles, 4) pensar hacia atrás y 5) pensar hacia adelante. La estrategia *prueba y error* consiste en probar una idea y ver si ésta funciona, se enfoca en el éxito de la partida sin procurar generalizar en primera instancia, es una estrategia fácil de implementar puesto que basta con respetar las reglas del juego para proceder. La *búsqueda de patrones* consiste en identificar una estructura que se repita en el juego e intentar encontrar una solución a partir de dicha estructura. La tercera estrategia, *simplificación de tareas difíciles*,

se caracteriza por conducir el tablero a configuraciones más simples que el jugador pueda enfrentar con mayor facilidad. La estrategia *pensar hacia atrás* se caracteriza por suponer el juego terminado y pensar qué configuración o configuraciones previas conducen a este resultado. Por último, *pensar hacia adelante* implica predecir los posibles movimientos del oponente y el rumbo que podría tomar la partida para así elegir qué movimiento representa un menor riesgo.

¿BAJO QUÉ CONDICIONES SURGEN ESTAS ESTRATEGIAS?

Las estrategias identificadas están condicionadas por diversos factores que no se limitan a las habilidades del estudiante como jugador, el tiempo disponible para llevar a cabo la partida, el contexto o los distractores que intervienen durante el juego.

Primera condición: comprender el juego. Que los jugadores comprendan las reglas y estén conscientes de sus posibilidades y limitaciones para que sea posible explotar los alcances del juego. Si un jugador ignora cuál es el propósito del juego, qué situaciones otorgan la victoria, qué acciones son permitidas y qué movimientos no puede realizar, difícilmente podrá elaborar un plan para ganar.

Segunda condición: equilibrio entre los oponentes. El papel deseable de un jugador es que éste intente ganar, desafíe las capacidades y reduzca las posibilidades de su oponente. Cuando un jugador se enfrenta a un contrincante que no comprende el juego o no muestra interés en vencerlo, no tiene sentido buscar más herramientas para derrotarlo pues con un mínimo esfuerzo podrá obtener el triunfo y esto, eventualmente, hará que ambos jugadores pierdan el interés.

Tercera condición: el juego debe representar un reto para los jugadores. No sólo los jugadores deben desafiarse entre sí, el juego también debe representar un reto. Un juego demasiado simple puede ser descifrado muy rápidamente e impedir que las estrategias evolucionen. Si la estrategia ganadora es descubierta en las primeras partidas, las sucesivas no tendrán sentido y la actividad se volverá tediosa e infructuosa.

¿PRACTICAR JUEGOS DE ESTRATEGIA FAVORECE EL DESARROLLO DE HEURÍSTICAS IDENTIFICADAS EN LA LITERATURA COMO ÚTILES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

Los datos empíricos de este trabajo y algunos resultados reportados en la literatura especializada sugieren que, en efecto, la práctica de juegos de estrategia

favorece el desarrollo de estrategias que han sido identificadas como útiles en la resolución de problemas. Es importante resaltar que en esta investigación no se observó a los estudiantes resolviendo problemas matemáticos, sin embargo, algunas de las estrategias identificadas al enfrentarse en el juego círculo de monedas, guardan una gran similitud con las heurísticas que han sido identificadas como habilidades fundamentales para resolver exitosamente problemas matemáticos (Schoenfeld, 1985; Polya, 1945); en particular: *pensar hacia atrás*, *pensar hacia adelante*, *prueba y error*, *simplificación de tareas* y *búsqueda de patrones*. Cuando los estudiantes se involucran en el juego círculo de monedas, dichas estrategias emergen de manera espontánea, esto sugiere que este tipo de juego puede ser un medio para practicar y promover el desarrollo de heurísticas importantes para la resolución de problemas matemáticos. Es importante señalar que no todos los juegos de estrategia rendirán los mismos frutos, Bruce (2007) habla de un problema poderoso o de gran alcance cuando éste permite utilizar una amplia gama de estrategias de resolución y propicia procesos de pensamiento más complejos.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS, ALCANCES Y LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Esta investigación se realizó con una pequeña muestra de estudiantes, además, la sesión de juego ocurrió en un ambiente controlado para cada equipo. Una ventaja del método aplicado fue la posibilidad de triangular datos entre las diversas fuentes: videograbación de la sesión, videograbación focalizada en los movimientos del jugador, cuadernillos de anotaciones y registro de duración de las partidas. La realización de entrevistas posteriores a la sesión de juegos habría enriquecido los resultados permitiendo profundizar en el análisis e implicaciones de los datos.

El estudio evidencia el surgimiento de estrategias al intentar ganar el juego círculo de monedas, éstas son similares a algunas estrategias de resolución de problemas: prueba y error, búsqueda de patrones, simplificación de tareas, pensar hacia adelante y pensar hacia atrás. Para conocer las potencialidades de otros juegos de estrategia, son necesarias investigaciones que determinen qué estrategias emergen de los juegos de interés.

Se considera que las tres condiciones identificadas en esta investigación pueden ser generalizables dado que no dependen del contexto en el que se desarrolla la sesión de juegos, por lo tanto, el surgimiento de estrategias útiles

para la resolución de problemas al practicar juegos de estrategia está condicionado por diversos factores y se han señalado tres. La aplicación de juegos de estrategia en el nivel superior puede contribuir en el desarrollo de estrategias de solución de problemas matemáticos pero el sólo hecho de aplicar un juego no es garantía de ello. De utilizar juegos en el nivel superior se debe procurar que sean de gran alcance para propiciar procesos de pensamiento complejos. Una forma de enriquecer los aportes del juego es extender la fase cuatro del modelo de Olfos y Villagrán (2001) variando los oponentes, haciendo modificaciones al juego o promoviendo análisis retrospectivos que permitan a los estudiantes llegar a generalizaciones de cómo ganar. Como se puede advertir en el apartado *Análisis de datos*, la reconstrucción de jugadas permite advertir las estrategias que están ocurriendo en la contienda, esta situación podría ser útil para estos análisis retrospectivos pues brindan la oportunidad de hacer explícitas las estrategias que se están utilizando y discutir con los estudiantes el rol que están desempeñando en el juego para con ello promover su utilización.

Los efectos de factores como la motivación, comportamiento o actitudes del estudiante, agregan variables que deben considerarse al incluir juegos de estrategia en la clase de matemáticas. Son necesarias investigaciones con distintos juegos de estrategia para caracterizar el alcance de los mismos y así establecer cuáles resultan más adecuados en el nivel superior, además de realizar estudios dentro del aula para determinar si lo reportado en un ambiente controlado es aplicable en una clase real de matemáticas en el nivel superior y qué otros factores influyen en la evolución de la sesión. Respecto a los aspectos motivacionales y actitudinales, existen cuestiones que no se discuten en la literatura, por ejemplo ¿cómo se desarrolla una sesión de juego en el nivel superior en un salón de clases real? ¿Cuál es la actitud de estudiantes universitarios cuando el maestro de matemáticas propone un juego sin aparente contenido matemático? ¿Qué efecto afectivo tiene en el estudiante perder un gran número de partidas?

Metodológicamente, la medición del tiempo que duraron las partidas y el registro de qué jugador ganó, resultaron importantes para identificar momentos destacables del juego entre los competidores, como el posible surgimiento de una estrategia o un punto de equilibrio entre los contendientes. Dos aspectos sumamente útiles en la investigación fueron la reconstrucción de jugadas y las reflexiones de los estudiantes al finalizar cada partida; estas herramientas permitieron hacer análisis puntuales sobre las jugadas de los estudiantes para identificar sus estrategias.

“La resolución de problemas, que es en esencia una actividad creativa, no puede ser construida exclusivamente con rutinas, recetas y fórmulas” (NCTM, 1980, traducción nuestra). Realizar investigaciones enfocadas exclusivamente al nivel superior permitirá evaluar de forma más completa los alcances y limitaciones del uso de juegos de estrategia con estudiantes universitarios.

REFERENCIAS

- Afari, E., J. Aldridge, B. Fraser (2012). Effectiveness of Using Games in Tertiary-level Mathematics Classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1369-1392. doi: 10.1007/s10763-012-9340-5
- Bragg, L. (2012). Testing the Effectiveness of Mathematical Games as a Pedagogical Tool for Children's Learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1445-1467. doi: 10.1007/s10763-012-9349-9
- Bright, W. G. (1980). Game Moves as they Relate to Strategy and Knowledge. *The Journal of Experimental Education*, 48(3), 204-209. doi: 10.1080/00220973.1980.11011736
- Bruce, D. C. (2007). Student Interaction in the Math Classroom: Stealing Ideas or Building Understanding. *What works? Research into practice*. Ministry of Education. Ontario, Canadá. Consultado el 8 de marzo de 2016 en: <http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/bruce.pdf>
- Bureau of Exceptional Education and Student Services (2010). Classroom Cognitive and Meta-Cognitive Strategies for Teachers. *Research-Based Strategies for Problem-Solving in Mathematics K-12*.
- Butler, J. T. (1988). Games and Simulations: Creative educational alternatives. *TechTrends*, 33(4), 20-23. doi: 10.1007/BF02771190
- Corbalán, Y. F. (1996). Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de problemas. *SUMA*, 23, 21-32. Consultado el 8 de marzo de 2016 en: <http://revis-tasuma.es/IMG/pdf/23/021-032.pdf>
- Cuoco, A., P. Goldenberg, J. Mark (1996). Habits of mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 375-402.
- Elia, I., M. van den Heuvel-Panhuizen, A. Kolovou (2009). Exploring Strategy Use and Strategy Flexibility in Non-routine Problem Solving by Primary School High Achievers in Mathematics. *ZDM – The International Journal of Mathematics Education*, 41(5), 605-618. doi: 10.1007/s11858-009-0184-6

- Gairín, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar*, 17, 105-118. Recuperado de <http://ddd.uab.cat/pub/educar/0211819Xn17p105.pdf>
- Gairín, J. M. (2003). Aprender a demostrar: Los juegos de estrategia. En E. Palacián y J. Sancho (eds.), *Actas sobre las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 171-188). Instituto de Ciencias de la Educación. Zaragoza. Consultado el 8 de marzo de 2016 en: http://www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r_40/nr_456/a_6219/6219.pdf
- Gardner, M. (1988). *Matemática para divertirse*. Granica: Buenos Aires.
- Gardner, M. (1995). *New Mathematical Diversions*. The Mathematical Association of America. Washington.
- González, A. (2014). *Estrategias utilizadas por estudiantes universitarios al intentar ganar juegos de estrategia bipersonales* (Tesis de maestría no publicada). México. CICATA-IPN.
- González, A., Molina, J. y Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 26(3), 109-135.
- Guzmán, M., De (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. En Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton (eds.), *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Sociedad Canaria de profesores de Matemáticas Isaac Newton: Santa Cruz de Tenerife. pp. 49-85.
- Guzmán, M., De (1995). *Aventuras matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios*. Pirámide: Madrid.
- Kraus, H. W. (1982). The Use of Problem-solving Heuristics in the Playing of Games Involving Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(3), 172-182.
- Krulik, S., y A. Wilderman (1976). Mathematics Class + Strategy Games = Problem Solving. *School Science and Mathematics*, 76(3), 221-225. doi: 10.1111/j.1949-8594.1976.tb09262.x
- Levasseur, K., A. Cuoco (2003). Mathematical Habits of Mind. En H.L. Schoen, R. Charles (Eds.), *Teaching Mathematics through Problem Solving. Grades 6-12*. Unites States of America: The National Council of Teachers of Mathematics. pp. 27-38.
- National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA. Consultado el 8 de marzo de 2016 en: Recuperado de <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17278>
- National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

- Consultado el 8 de marzo de 2016 en: <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=4294967312>
- Oldfield, J. B. (1991a). Games in the Learning of Mathematics Part 1: A Classification. *Mathematics in School*, 20(1), 41-43.
- Oldfield, J. B. (1991b). Games in the Learning of Mathematics Part 3: Games for Developing Strategies. *Mathematics in School*, 20(3), 16-18.
- Olfos, R., E. Villagrán (2001). Actividades lúdicas y juegos en la iniciación al álgebra. *Integra*, 5, 39-50. Consultado el 8 de marzo de 2016 en: <http://matclase.pbworks.com/f/JUEGO2.pdf>
- Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic press: Orlando.