La construcción de circunferencias tangentes. Estudio teórico desde una perspectiva heurística

Liliana Siñeriz y Trinidad Quijano

Resumen: En este artículo describimos un estudio teórico del proceso de resolución de una situación abierta en el marco de una investigación centrada en las construcciones geométricas. Por un lado, nos proponemos mostrar la multiplicidad de aspectos inherentes al planteamiento y resolución de problemas a partir de ella. Por otro lado, pretendemos aportar algunas pautas o sugerencias al organizar la enseñanza que lleven a rescatar los métodos y heurísticas que subyacen al resolverla, y promover la generación de nuevos problemas desde procesos de elaboración y contrastación de conjeturas a través de la exploración.

Palabras clave: construcciones, resolución de problemas, planteamiento de problemas, métodos heurísticos, fases.

The construction of tangent circumference.
Theoretical study from a heuristic perspective

Abstract: This paper describes a theoretical study of the process of solving an open situation, in the framework of a research focused on geometric constructions. On one hand, we intend to show the multiplicity of aspects inherent to posing and solving problems from it. On the other hand, our aim is to provide some guidelines or suggestions to organize how to teach, in order to rescue methods and heuristics that underlie when it is solved, and to promote the generation of new problems arising from processes to develop and test conjectures by means of exploration.

Keywords: constructions, problem solving, problem posing, heuristics methods, phases.

Fecha de recepción: 27 de noviembre de 2014; fecha de aceptación: 2 de septiembre de 2015.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo abordamos una situación problemática que forma parte de un estudio más amplio, en el que se indagan los procesos de aprendizaje de las construcciones geométricas en la formación de profesores.[1]

La investigación desarrollada en el proyecto marco está centrada en los problemas de construcción, por ser estos un dominio propicio tanto para realizar exploraciones empíricas que llevan a formular conjeturas y producir argumentos de validación como para trabajar modos y medios de resolución que hacen a los problemas más abordables y que pertenecen al terreno de la heurística.

La situación abierta que vamos a analizar fue planteada con diferente intencionalidad en asignaturas de distinta índole: "Didáctica Especial y Residencia" y "Seminario de la Enseñanza de la Matemática", ambas pertenecientes al último año del Profesorado de Matemática en el Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue. En Siñeriz y Quijano (2014), hemos interpretado las producciones de los alumnos de Seminario en torno a dicha situación, a la luz de las estrategias y métodos que habían sido objeto de enseñanza.

En este artículo presentamos una organización teórica del proceso de resolución estructurada en fases, que puede resultar un referente útil al planificar la enseñanza, ya sea en esta o en otras situaciones abiertas. Realizamos un análisis de la situación desde una perspectiva heurística, orientada a explicitar los métodos y estrategias que subyacen al resolverla, así como también a promover la generación de problemas a partir de la propia situación, el examen de las soluciones y la extensión de dicha situación abierta. Comenzamos haciendo una breve alusión al marco teórico de referencia para luego centrarnos en el análisis que constituye el núcleo de esta publicación.

[1] Proyecto de investigación 04/B189, desarrollado en el Centro Regional Universitario Bariloche (CRUB), aprobado y subsidiado por la Secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue. 2014-2017.

MARCO TEÓRICO

Sobre el planteamiento de problemas

Las actuales orientaciones curriculares subrayan la importancia de la resolución de problemas abiertos en la clase de Matemática, los cuales admiten diferentes respuestas y dan lugar a la formulación de nuevas preguntas, así como a la construcción de estrategias personales de resolución. Rescatamos la potencialidad de las situaciones abiertas en la práctica escolar en cuanto a que favorecen el planteamiento de problemas y el trabajo de carácter empírico que lleva a elaborar conjeturas, contrastarlas y validarlas.

Diversos autores promueven el empleo de este tipo de actividades para crear entornos de aprendizaje que lleven a poner en práctica aspectos de la actividad matemática. Butts (1980) establece una tipología de problemas según el grado de creatividad necesario para abordarlos y, en la categoría de "situación problemática", encuadra aquellas situaciones en cuyo enunciado no se han delimitado los problemas inherentes a ella y esa es una de las tareas a cargo del resolutor. Brown y Walter (1983) distinguen dos aproximaciones para enunciar problemas, llamadas "aceptando" y "cambiando", a partir de determinadas preguntas generadoras de problemas. La primera consiste en mantener lo dado en la exploración y considerar una serie de cuestiones generales, que trascienden a un contenido específico, por ejemplo, *¿Qué es constante? ¿Qué es variable? ¿Hay solución? ¿Hay un caso límite?* En la segunda, la forma de plantear problemas a partir de un problema es a través de la pregunta *¿Qué pasaría si...?* de manera sistemática, modificando las partes principales de este, examinando las propiedades que caracterizan los objetos matemáticos implicados y considerando otras, explorando el efecto de los cambios y buscando explicaciones a lo que ocurre. En consonancia con esta línea, Skovsmose (2000) plantea organizar el trabajo alrededor de proyectos e introduce la noción de "escenario de investigación" como una situación que permite a los estudiantes formular preguntas y buscar explicaciones, y señala posibles formas de intervención docente, tales como *¿Qué pasa si...? ¿Qué sucede si...? ¿Por qué es que...?* para involucrarlos en un proceso de exploración y búsqueda de argumentos.

Entendemos que el proceso de resolución de problemas no es independiente del de plantearlos y en este sentido consideramos estas líneas de trabajo al abordar la situación abierta que es objeto de estudio.

Sobre las fases de resolución

El examen del proceso de resolución de problemas a partir de las fases por las que transitaría un resolutor ideal (Siñeriz, 2000) también es un referente para el análisis que presentamos. Asumimos que el proceso de resolución de problemas no se compone de conductas aisladas, sino que estas tienen un sentido respecto a la totalidad del proceso, lo que lleva a distinguir fases con objetivos específicos. Desde este punto de vista, las fases propuestas en Polya (1965) pueden ser un medio para organizar dicho proceso y, por ende, un elemento que considerar al planificar la enseñanza en resolución de problemas, razón por la cual constituyen un componente esencial en el análisis teórico que desarrollamos en este trabajo.

Atendiendo a los objetivos de cada una de ellas, podemos caracterizarlas de manera sintética: la fase de *comprensión* estaría orientada a percibir la idea global del problema por resolver, entender cuáles son sus partes principales y realizar una formulación propia de este. En la *elaboración del plan*, se estaría focalizando el estado de conocimientos con vistas a seleccionar heurísticas y reformular el problema acorde con ellas. La *ejecución del plan* sería la puesta en marcha del esquema de solución, siguiendo pautas que permiten su implementación en forma ordenada. La *visión retrospectiva* no sólo consistiría en volver sobre lo hecho para revisarlo, sino también en ir más allá de lo que pide el problema original, por lo que en ella estaría contemplada tanto la revisión como la extensión del problema.

En este estudio, interpretamos las fases en relación con la situación abierta, sin perder de vista todos y cada uno de los problemas que provienen de la exploración de los datos y las condiciones que en ella se plantean.

Sobre métodos heurísticos de resolución

Los *métodos* implicados en la resolución de problemas de construcción llevan a una transformación del problema original de manera estándar; sin embargo, los situamos en el terreno de la heurística, ya que no garantizan su solución, sino que lo transforman en construcciones o problemas más abordables.

Extrapolamos algunos resultados de una investigación anterior (Siñeriz, 2000), donde se analiza la actuación competente al enseñar a resolver problemas de regla y compás y se diferencian los métodos de acuerdo con su función dentro del proceso de resolución: como medio de organización o como medio de resolución. En este trabajo rescatamos, por un lado, el *Método de análisis síntesis* para organizar dicho proceso y, por el otro, el *Método de los dos lugares*, puesto que es el que subyace en la resolución de la situación abierta que analizamos.

La caracterización del *Método de análisis síntesis* puede encontrarse en el libro XIII de los Elementos (Euclides, 1991, libros X-XIII, p. 314). El análisis es el camino que lleva desde la incógnita a los datos, estableciendo progresivamente sus relaciones mutuas; la *síntesis* es el camino contrario, que va desde los datos hasta la incógnita. En este estudio, el *análisis* se refleja tomando la *figura de análisis* como punto de partida. Esta figura es un dibujo a mano alzada de la incógnita, donde se remarca lo dado y, a partir de ella, se analizan los resultados intermedios que habría que plantearse para determinarla. La *síntesis* consiste en efectuar la construcción que permite determinar la incógnita.

El *Método de los dos lugares*, al que aludiremos en un próximo apartado, es uno de los tres métodos presentados en forma general en Polya (1962-1965) y en detalle en la investigación mencionada, los cuales pueden ser utilizados para resolver una variedad de problemas de construcción geométrica.

ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN ABIERTA

La riqueza de la situación abierta que es objeto de estudio radica en que puede ser abordada con conocimientos elementales de geometría, mediante distintas aproximaciones e involucrando diferentes tópicos curriculares (posiciones relativas entre circunferencias, lugares geométricos, triángulos, etc.). Asimismo, a partir de ella, podemos generar varios problemas que pueden analizarse en conjunto de modo de producir un conocimiento unificado en relación con un campo de problemas.

Situación abierta:

Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores.

Cabe señalar que esta situación se podría encuadrar dentro del dominio del conocido problema de Apolonio: dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados. Este problema da lugar a 10 casos posibles que llevan a examinar diferentes alternativas respecto a las posiciones relativas de los objetos dados y de la incógnita en relación con esos objetos.

A diferencia de dicho problema, en la situación abierta que presentamos hay dos objetos iniciales cuya posición relativa está dada (dos circunferencias exteriores), por lo que las posibilidades por analizar son las posiciones relativas entre datos e incógnita.

A continuación, se realiza el análisis teórico estructurado en fases, explicitando las heurísticas que pueden utilizarse y los métodos que subyacen o que pueden aplicarse en su resolución. Además, se incluyen algunas preguntas o sugerencias para su tratamiento, con el fin de promover la formulación de problemas en el recorrido por dichas fases.

Comprensión

En esta fase revisamos las nociones implicadas y examinamos las partes principales de la situación abierta (datos, incógnita y condición), desde las cuales podemos formular los problemas asociados a ella.

Este análisis lleva al uso de diferentes heurísticas, tales como la *consideración de casos* particulares o genéricos y el *examen de posibilidades*.[2]

Atendiendo inicialmente a los *datos*: $C_1(o_1, R_1)$ y $C_2(o_2, R_2)$ (con $\overline{o_1o_2} > \overline{R_1R_2}$), surgen naturalmente las dos alternativas respecto a los radios de las circunferencias dadas: *i)* $R_1 = R_2$ (caso particular); *ii)* $R_1 \neq R_2$ (caso genérico).

El análisis de la *incógnita* también lleva a atender diferentes posibilidades respecto a la ubicación del centro de la circunferencia buscada con los centros dados: *a)* centros alineados (caso particular); *b)* centros no alineados (caso genérico).

Al centrar la atención en la *condición*, observamos la relación entre la incógnita y los datos, lo que lleva a considerar cuatro casos posibles respecto a las posiciones relativas de la incógnita con cada una de las circunferencias exteriores dadas:

[2] El examen de posibilidades consiste en descomponer el dominio de objetos a los que se refiere el problema mediante una partición y resolver el problema para cada una de las partes.

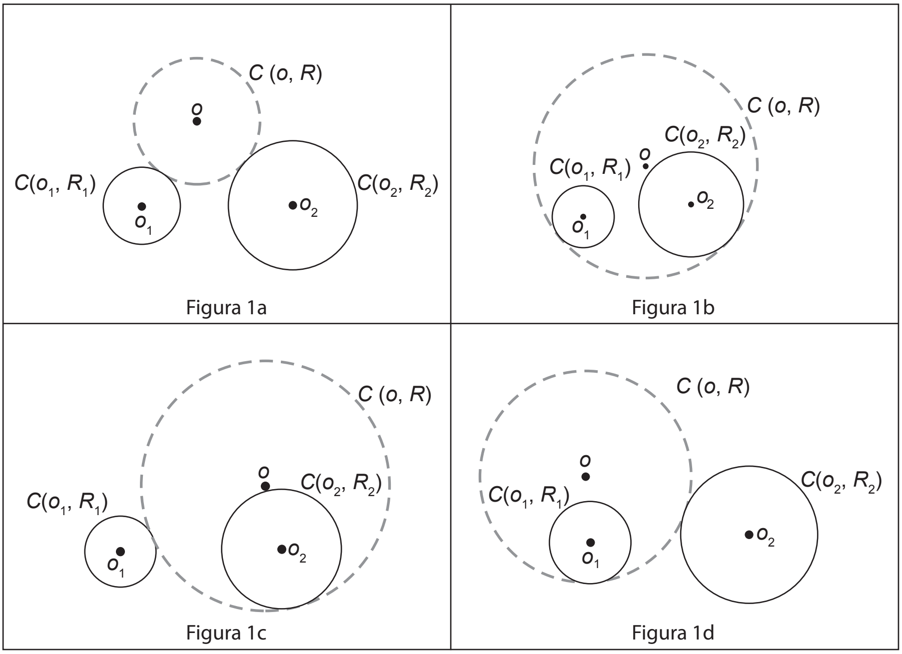

Figura 1

1. La circunferencia es tangente exterior con ambas circunferencias dadas (figura 1a).
2. La circunferencia es tangente interior con ambas circunferencias dadas (figura 1b).
3. La circunferencia es tangente exterior con $C_1(o_1, R_1)$ y es tangente interior con $C_2(o_2, R_2)$ (figura 1c).
4. La circunferencia es tangente exterior con $C_2(o_2, R_2)$ y es tangente interior con $C_1(o_1, R_1)$ (figura 1d).

Las consideraciones anteriores llevan a formular una serie de problemas que se generan a partir de las distintas alternativas mencionadas, las cuales sintetizamos en el diagrama de la figura 2, y cerramos esta fase de *comprensión* al identificar el conjunto de problemas asociados a la situación.

1. $C(o, R)$ es tangente exterior con $C_1(o_1, R_1)$ y $C_2(o_2, R_2)$
   - a. Centros alineados: $o \in \overline{o_1 o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
   - b. Centros no alineados: $o \notin \overline{o_1 o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
2. $C(o, R)$ es tangente interior con $C_1(o_1, R_1)$ y $C_2(o_2, R_2)$
   - a. Centros alineados: $o \in \overline{o_1 o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
   - b. Centros no alineados: $o \notin \overline{o_1 o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
3. $C(o, R)$ es tangente exterior con $C_1(o_1, R_1)$ e interior con $C_2(o_2, R_2)$
   - a. Centros alineados: $o \in \overline{o_1 o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
   - b. Centros no alineados: $o \notin \overline{o_1 o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
4. $C(o, R)$ es tangente interior con $C_1(o_1, R_1)$ e exterior con $C_2(o_2, R_2)$
   - a. Centros alineados: $o \in \overline{o_1 o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
   - b. Centros no alineados: $o \notin \overline{o_1 o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$

Figura 2

Elaboración y ejecución del plan

Ambas fases se desdibujan en la situación abierta y estarían vinculadas a cada uno de los problemas incluidos en ella. Abordamos entonces el estudio desde cada problema, considerando los métodos heurísticos que subyacen en su resolución.

Tal como anticipamos al describir los referentes teóricos, en particular vamos a recurrir al *Método de análisis-síntesis* para organizar el recorrido por estas dos fases. En consecuencia, la fase de elaboración estará centrada en el *análisis* y la ejecución, en llevar a cabo la *síntesis*.

En esta presentación, las *figuras de análisis* están hechas en computadora en lugar de a mano alzada para lograr mayor claridad y facilitar la lectura y, además, se deja de lado la *síntesis* que llevaría a hacer efectiva la construcción.

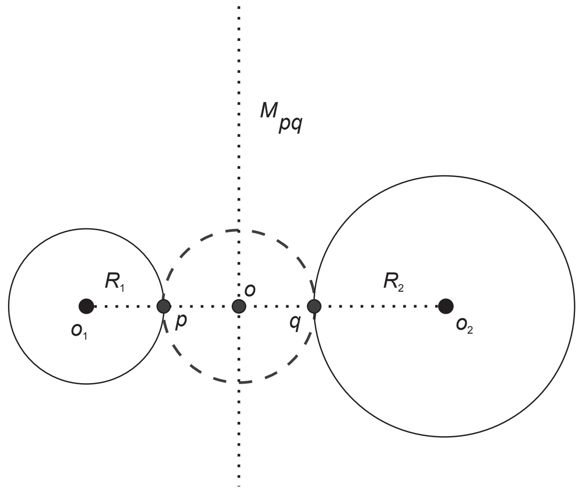

Figura 3. Figura de análisis correspondiente al caso 1 y centros alineados

1. Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(o_1, R_1)$ y $C_2(o_2, R_2)$

1.a Centros alineados

Damos el problema por resuelto y dibujamos una figura de análisis, donde P y q son los puntos de tangencia (figura 3).

El problema requiere encontrar el centro de la circunferencia que cumple con las condiciones enunciadas, a partir del cual queda determinado el radio.

La figura 3 nos permite observar, por un lado, que el centro (o) de la circunferencia buscada debe estar en la línea de los centros y, por el otro, que debe equidistar de los puntos de tangencia. Por tanto, el centro se encuentra en dos lugares geométricos específicos: la recta $\overleftrightarrow{o_1o_2}$ y la mediatriz del segmento $\overline{pq}(M_{\overline{pq}})$.

La solución es la circunferencia $C(o,R)$, donde $R = \dfrac{\overline{pq}}{2} = \dfrac{\overline{o_1o_2} - \overline{R_1R_2}}{2}$.

En el caso de ser iguales los radios de las circunferencias iniciales, la mediatriz implicada ($M_{\overline{pq}}$) coincide con la mediatriz del segmento determinado por o_1 y o_2 ($M_{\overline{o_1o_2}}$), donde $R = \dfrac{\overline{o_1o_2} - \overline{R_1R_2}}{2}$.

En la resolución de este problema subyace un método:

Método de los dos lugares
1. Reducir el problema a la construcción de un punto.
2. Dividir la condición en dos partes de modo que cada parte suministre un lugar geométrico para el punto incógnita; cada lugar debe ser circular o rectilíneo.

En el segundo paso del método, se incluye una característica esencial de los lugares geométricos[3] por considerar, estos deben ser circulares o rectilíneos, lo cual es una restricción que resulta previsible en el mundo de la regla y el compás.

El método presentado va más allá de este problema y resulta de gran utilidad en la resolución de una extensa gama de problemas de construcción.

Cabe señalar la potencialidad de la figura de análisis para indagar las relaciones entre datos e incógnita; en particular, permite visualizar tanto el punto incógnita como los lugares geométricos involucrados, con lo cual sólo restaría realizar la construcción.

1.b Centros no alineados

El valor del radio R en la alternativa anterior lleva a anticipar que, para que exista solución, debería cumplirse $R \geq \dfrac{\overline{o_1o_2} - \overline{R_1 + R_2}}{2}$.

Partimos de la figura de análisis, en la que inicialmente volcamos los datos y dibujamos la incógnita (figura 1a). La observación de esta figura nos lleva a introducir en ella elementos auxiliares tales como el segmento $\overline{o_1o_2}$ así como los segmentos que unen el centro buscado con los centros dados. Podemos visualizar el triángulo $o_1\overset{\Delta}{o}o_2$, figura auxiliar que es útil para la resolución. El problema se transforma en construir dicho triángulo y, puesto que contamos con un método, trataremos de utilizarlo. Por tanto, reducimos el problema a la determinación de un punto (o) e intentamos encontrar los lugares geométricos que nos llevan a delimitarlo (figura 4).

[3] Siguiendo a Polya (1962-1965), en este trabajo el término “lugar” significa esencialmente lo mismo que el término “conjunto”; definimos el conjunto (o lugar) enunciando una condición que sus elementos (puntos) deben satisfacer, o una propiedad que estos elementos deben poseer. Cuando no disponemos de información respecto a qué propiedad caracteriza a los elementos de un cierto conjunto (S), diremos que “los elementos del conjunto S tienen la propiedad de pertenecer a S, y satisfacen la condición de que pertenecen a S”.

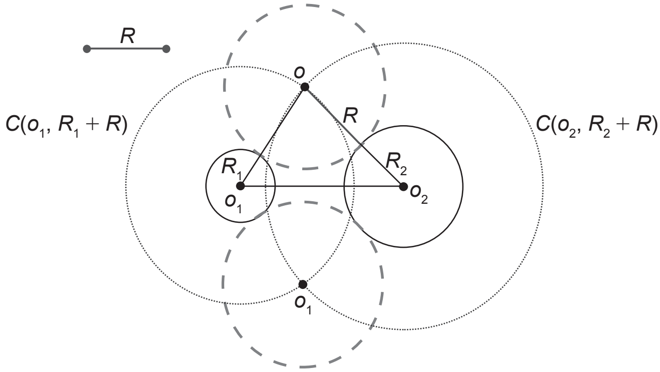

Figura 4. Figura de análisis correspondiente al caso 1 y centros no alineados

Observamos que para un radio arbitrario R, la condición requiere:

$$o \in C_1(o_1, R_1 + R) \;\wedge\; o \in C_2(o_2, R_2 + R)$$

Por tanto, $\{o, o'\} = C_1\,(o_1, R_1 + R) \cap C_2\,(o_2, R_2 + R)$

Con lo cual, para cada valor de R habrá dos soluciones: $C(o,R)$ y $C(o',R)$.

Habiendo culminado el *análisis*, restaría realizar la *síntesis*, con lo cual, al recorrer el camino inverso y partir de los datos, quedaría(n) por construir la(s) circunferencia(s) buscada(s).

En el caso de que las circunferencias dadas fueran congruentes, el triángulo $o_1\overset{\Delta}{o}o_2$ sería isósceles y el centro se hallaría de manera análoga.

Tal como se viene haciendo hasta ahora, continuamos atendiendo las demás alternativas considerando los métodos heurísticos anteriores, utilizando el *análisis-síntesis* para organizar el proceso de resolución y el *método de los dos lugares* como plan para obtener la solución. En cada caso, presentamos el *análisis* y mostramos cómo quedarían plasmados los pasos del *método de los dos lugares*, dejando de lado la *síntesis* o construcción efectiva de la circunferencia buscada.

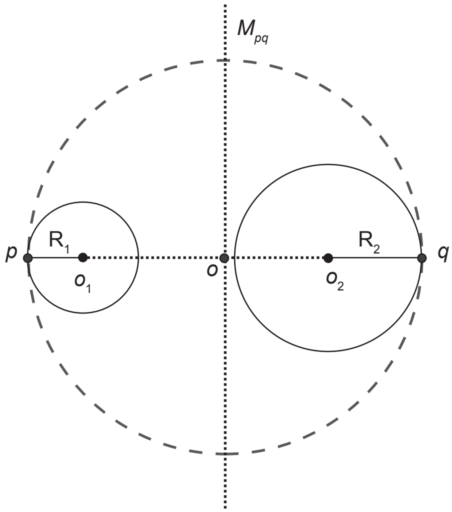

Figura 5. Figura de análisis correspondiente al caso 2 y centros alineados

2. Construir una circunferencia tangente interior con $C_1(o_1, R_1)$ y $C_2(o_2, R_2)$

2.a Centros alineados

Sean p y q puntos de tangencia, $\overline{pq} = \overline{o_1o_2} + \overline{R_1} + \overline{R_2}$ (figura 5).

Condición: $o \in \overline{o_1o_2} \wedge o \in M_{\overline{pq}}$

$$\therefore \ \{o\} = \overline{o_1o_2} \cap M_{\overline{pq}}$$

La solución es la circunferencia $C(o,R)$, donde $R = \dfrac{\overline{o_1o_2} + \overline{R_1 + R_2}}{2}$.

2.b Centros no alineados

Puede observarse que, para que exista solución, debería cumplirse $R \geq \dfrac{\overline{o_1o_2} + \overline{R_1 + R_2}}{2}$ (figura 6).

Condición para un R arbitrario: $o \in C_1(o_1, R_1 - R) \wedge o \in C_2(o_2, R - R_2)$

$$\therefore \ \{o,o'\} = C_1(o_1, R - R_1) \cap C_2(o_2, R - R_2)$$

Para cada valor de R, habrá dos soluciones: $C(o,R)$ y $C(o',R)$.

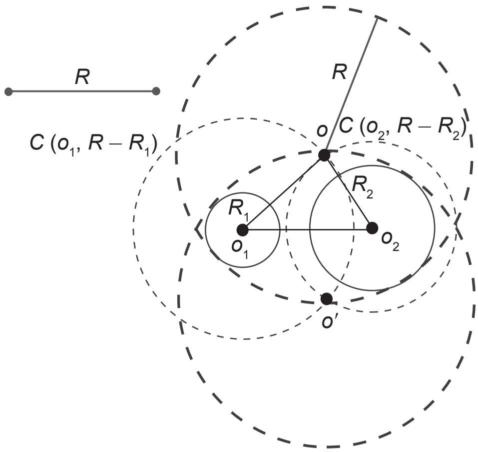

Figura 6. Figura de análisis correspondiente al caso 2 y centros no alineados

3. Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(o_1, R_1)$ y tangente interior con $C_2(o_2, R_2)$

3.a Centros alineados

Sean p y q puntos de tangencia (figura 7).

Condición: $o \in (\overline{o_1o_2}) \wedge o \in M_{\overline{pq}}$

$$\therefore \{o\} = \overline{o_1o_2} \cap M_{\overline{pq}}$$

La solución es la circunferencia $C(o,R)$ donde $R = \dfrac{\overline{o_1o_2} + R_2 - R_1}{2}$.

3.b Centros no alineados

Puede observarse que, para que exista solución en este caso, debería cumplirse $R \geq \dfrac{o_1o_2 + R_2 + R_1}{2}$ (figura 8).

Condición para un R arbitrario: $o \in C_1(o_1, R + R_1) \wedge o \in C_2(o_2, R - R_2)$

$$\therefore \{o, o'\} = C_1(o_1, R + R_1) \cap C_2(o_2, R - R_2)$$

Para cada valor de R, habrá dos soluciones: $C(o,R)$ y $C(o',R)$.

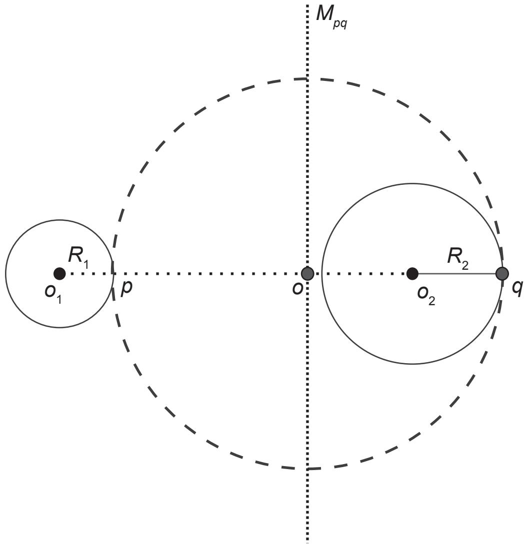

Figura 7. Figura de análisis correspondiente al caso 3 y centros alineados

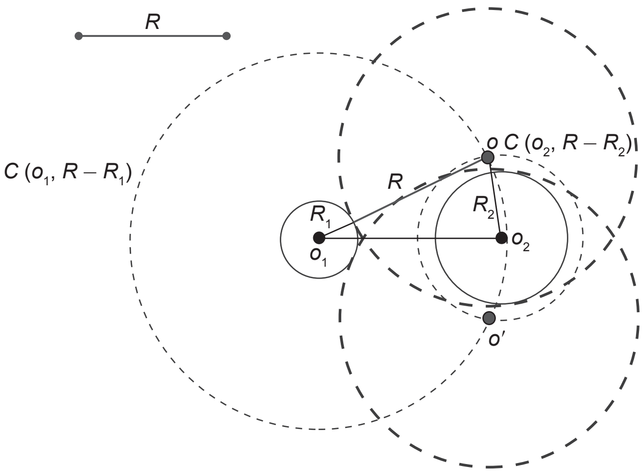

Figura 8. Figura de análisis correspondiente al caso 3 y centros no alineados

4. Construir una circunferencia tangente interior con $C_1(o_1, R_1)$ y tangente exterior con $C_2(o_2, R_2)$

Este caso es similar al anterior, la figura de análisis nos permitiría observar que, en el caso de centros alineados, estarían involucrados los mismos lugares geométricos que en 3.a para hallar el centro buscado. Y en el caso de centros no alineados, o y o' se hallarían en la intersección de las circunferencias $C_1(o_1, R - R_1)$ y $C_2(o_2, R + R_2)$.

A diferencia de las fases de elaboración y ejecución, en las que hemos puesto el acento en los métodos, ahora desviaremos la atención al estudio de las soluciones halladas y al planteamiento de nuevos problemas.

Visión retrospectiva

Esta fase consta de una mirada hacia atrás y otra hacia adelante, de revisión y extensión. Para organizarla, consideramos los aportes teóricos ya mencionados para promover instancias de planteamiento de problemas. Por un lado, la revisión está marcada por una vuelta hacia atrás en la que se formulan preguntas generales que llevan a considerar todos los problemas en conjunto y plantear nuevos interrogantes a partir del examen de la solución. Por otro lado, la extensión consiste en mirar hacia adelante y examinar problemas que pueden generarse a partir de cambiar los datos, la incógnita o la condición y el efecto que tiene hacerlo, buscando argumentos para explicar lo que ocurre.

1. Revisión

En los distintos problemas asociados a la situación abierta y con el propósito de promover nuevos cuestionamientos y exploraciones, cabe hacerse preguntas generales para la elaboración de conjeturas y su validación, tales como: ¿Qué características tienen las soluciones en cada caso? ¿Cómo variará la ubicación del centro cuando varía R? ¿Qué caracteriza al conjunto de puntos formado por dichos centros? ¿Hay alguna relación entre las soluciones halladas en los distintos casos?

Comenzando con el caso 1, donde la circunferencia buscada es tangente exterior a las dadas y atendiendo al caso particular $R_1 = R_2$, podemos observar

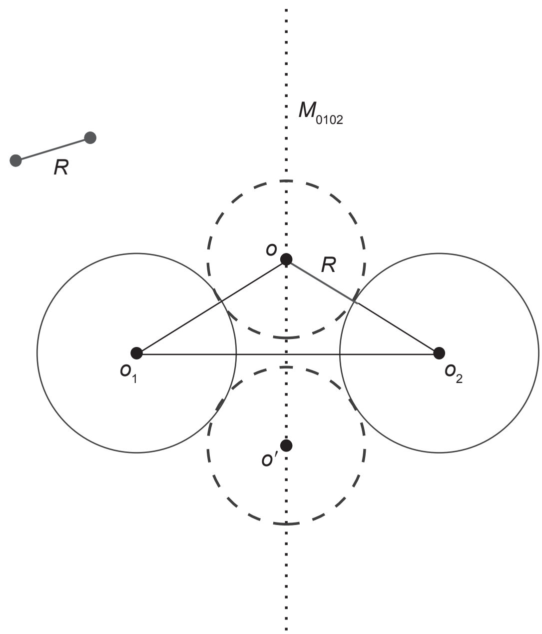

Figura 9. Figura de análisis correspondiente al caso 1, centros no alineados y radios iguales

en la figura de análisis (figura 9) que el triángulo $o_1\overset{\Delta}{o}o_2$ es isósceles, donde o es el vértice opuesto a la base $\overline{o_1o_2}$ y que, al variar R, los centros de las circunferencias buscadas están en la mediatriz del segmento $\overline{o_1o_2}$.

Para el caso genérico $R_1 \neq R_2$, las respuestas no son inmediatas, ya que ni la figura de análisis ni la propia construcción con instrumentos de geometría nos dan algún indicio para caracterizar al conjunto de puntos formado por los centros. Por esta razón, introducimos el recurso tecnológico para facilitar la elaboración de conjeturas y la exploración de las características de las posibles soluciones. Hay diferentes softwares de geometría dinámica tales como Cabri, SketchPad, Geogebra, entre otros, que pueden utilizarse con este propósito.

Atendiendo al análisis ya presentado correspondiente a este caso (figura 4), realizamos la síntesis valiéndonos de Geogebra y, al hacer esta construcción, quedan determinados los dos centros de las circunferencias buscadas para un radio arbitrario R.

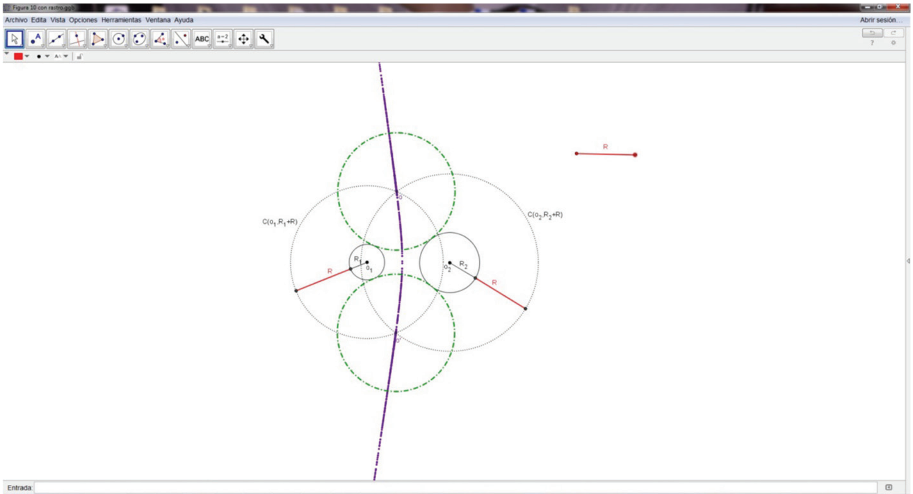

Figura 10. Construcción con Geogebra correspondiente al caso 1

El programa permite visualizar los posibles centros al variar el valor de R, y una de las maneras de hacerlo es activando la herramienta "rastro" sobre los puntos o y o' (figura 10).

La observación de una curva en pantalla, correspondiente a la ubicación de los centros, nos lleva a realizar diversas conjeturas respecto a la identificación del lugar geométrico involucrado. Podemos seguir explorando en la búsqueda de nuevas pistas, modificar los radios de las circunferencias dadas y evaluar los efectos que provocan tales cambios en dicha curva, y luego llegar a dilucidar que esta correspondería a la rama de una hipérbola.

Este hallazgo se traduce en una nueva reformulación de la tarea, que consiste en caracterizar a este lugar geométrico, realizando la validación correspondiente. Por tanto, el próximo paso será la determinación de los focos y del segmento diferencia de la cónica en cuestión. En esta dirección, podemos pensar en asociar los centros de las circunferencias dadas, o_1 y o_2, con los focos de la supuesta hipérbola. Ahora el problema radica en probar que la diferencia de las distancias de o y o' a cada uno de los centros dados es constante:

$$\overline{oo_1} = \overline{R_1 + R}$$
$$\overline{oo_2} = \overline{R_2 + R}$$
$$\overline{oo_2} - \overline{oo_1} = \overline{R_2 + R} - \overline{R_1 + R} = \overline{R_2 - R_1} = k \text{ (constante)}$$

Análogas relaciones se cumplen con o', por tanto, el lugar geométrico del centro de la circunferencia buscada cuando varía R es una rama de hipérbola de focos o_1 y o_2 y segmento diferencia $\overline{R_2 - R_1}$, con lo cual se valida la conjetura.

Si consideramos el caso 2, donde la circunferencia buscada es tangente interior a las dadas y recurrimos nuevamente a Geogebra, observamos que, al variar el radio R, también los centros se encuentran en una rama de hipérbola. Al hacer la validación, se puede constatar que el lugar geométrico implicado es la otra rama de hipérbola correspondiente al primer caso.

$$\overline{oo_1} = \overline{R - R_1}$$
$$\overline{oo_2} = \overline{R - R_2}$$
$$\overline{oo_1} - \overline{oo_2} = \overline{R - R_1} - \overline{R - R_2} = \overline{R_2 - R_1} = k \text{ (constante)}$$

Asimismo, si los radios de las circunferencias iniciales son iguales, los centros de las circunferencias pertenecen a la mediatriz de $\overline{o_1 o_2}$.

De manera similar, si hacemos la construcción en Geogebra para los casos restantes, donde la circunferencia buscada es tangente interior a una de las dadas y exterior a la otra, se puede concluir que los centros de las circunferencias pertenecen a una hipérbola cuyo segmento diferencia es $\overline{R_2 + R_1}$ (figura 11).

En síntesis, el lugar geométrico de los centros involucrados en la situación abierta corresponde a ramas de hipérbolas cuyo segmento característico es la suma o diferencia de los radios de las circunferencias dadas. En particular, si las circunferencias iniciales son congruentes, en los dos primeros casos dicho lugar pasa a ser una recta: la mediatriz del segmento determinado por los centros dados.

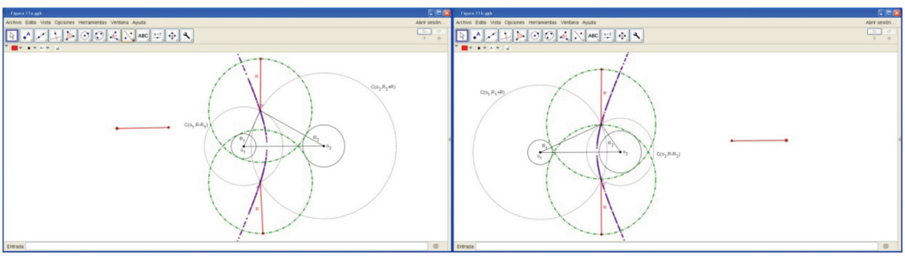

Figura 11. Construcciones en Geogebra de los casos 3 y 4

2. Extensión

Con el propósito de seguir generando nuevos problemas a partir de esta situación abierta, exploramos posibles cambios en sus partes principales a través de la pregunta ¿qué pasaría si...? El planteo de esta cuestión de manera sistemática nos lleva a examinar el efecto de hacer modificaciones en los datos, las condiciones o la incógnita y producir explicaciones en tal sentido. Como ya hemos mencionado, los problemas de Apolonio son una fuente importante de problemas abiertos vinculados a la situación presentada, los cuales también podrían considerarse al realizar su extensión.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de enunciados que resultan de modificar las partes principales de la situación abierta, dentro de los cuales quedan incluidos algunos de los contemplados por Apolonio.

a) ¿Qué sucedería si cambiamos los *datos*?
P_1: *Trazar una circunferencia tangente a una recta* A *y a una circunferencia* C(o,R) *en un punto* p *de esta (alternativas asociadas al problema 8 de Apolonio).*[4]
P_2: *Construir una circunferencia tangente a tres circunferencias exteriores (problema 10 de Apolonio).*

b) ¿Qué pasaría si cambiamos la *incógnita*?
P_3: *Construir una recta tangente a dos circunferencias exteriores.*
P_4: *Dadas dos circunferencias exteriores, construir un trapecio circunscripto a una de ellas donde uno de sus lados es tangente a la otra.*

c) ¿Y si cambiamos la *condición*?
P_5: *Dadas dos circunferencias exteriores, construir una circunferencia tangente a una de ellas y cuya área duplique al área de la otra.*
P_6: *Dadas dos circunferencias exteriores, construir una circunferencia homotética a ellas y de radio* R.

A MODO DE CIERRE

La situación abierta propuesta nos ha permitido poner de manifiesto dos métodos que pueden emplearse para resolver una variedad de problemas de cons-

[4] Problema 8 de Apolonio: trazar una circunferencia que pasa por un punto y es tangente a una recta y a una circunferencia.

trucción, así como también diferentes estrategias que pueden surgir a través de un proceso de exploración, tales como considerar casos particulares, generalizar, examinar distintas posibilidades, conjeturar y validar, entre otras.

La consideración de las fases como medio de organización del proceso de resolución y el acento puesto en el planteamiento de problemas constituyen los otros dos pilares sobre los que realizamos el estudio que aquí se informa. Los señalamientos e interpelaciones que lo conforman responden al propósito de construir ambientes de aprendizaje que estimulen la producción de conjeturas y su validación, la generación de nuevos problemas a partir de uno inicial y la integración de distintos contenidos escolares.

Surgen naturalmente algunas implicaciones para la práctica docente que atañen a los elementos que habría que atender al organizar la enseñanza de resolución de problemas a partir de las construcciones geométricas, movilizando el razonamiento argumentativo desde el conocimiento de las figuras.

Esperamos poder aportar una perspectiva de trabajo que lleve a conceptualizar los problemas como oportunidades para extender o formular nuevos problemas y poner en juego tareas propias del quehacer matemático, específicamente aquellas de carácter heurístico, para resignificar los contenidos geométricos de acuerdo con los actuales enfoques disciplinares y didácticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brown, S. I. y M. I. Walter (1983), *The art of problem posing*, Filadelphia, The Franklin Institute Press.

Butts T. (1980), "Posing Problems Properly", en S. Krulik y R. Reys (eds.) (1980), *Problem Solving in School Mathematics*, Reston, VA, NCTM, pp. 23-33.

Euclides (1991), *Elementos*, Madrid, Gredos.

Polya, G. (1962-1965), *Mathematical Discovery*, 2 vols., Nueva York, John Wiley and Sons.

——— (1965), *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas. [Versión original (1945), *How to solve it*, Princeton, NJ, Princeton University Press].

Siñeriz, L. (2000), *Enseñanza de resolución de problemas de regla y compás del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos*, Tesis doctoral, Universitat de València. Disponible en: http://roderic.uv.es//handle/10550/37998

Siñeriz, L. y M. Quijano (2014), "El problema de las circunferencias tangentes.

Análisis de producciones de estudiantes de profesorado", en G. Astudillo, P. Willging y N. Ferreyra (eds.), *Memorias de la V Reunión Pampeana de Educación Matemática*, Santa Rosa, La Pampa, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, pp. 90-99.
Skovsmose, O. (2000), "Escenarios de investigación", *Revista Ema*, vol. 6, núm. 1, pp. 3-26.

DATOS DE LAS AUTORAS

Liliana Siñeriz
Centro Regional Universitario Bariloche-Universidad Nacional del Comahue,
Río Negro, Argentina
lsineriz@gmail.com

Trinidad Quijano
Centro Regional Universitario Bariloche-Universidad Nacional del Comahue,
Río Negro, Argentina
trinidadquijano@gmail.com