 DOI: 10.24844/EM3101.08

Análisis de la relación entre imagen y definición en una situación problemática mediada por GeoGebra a partir de no ejemplos del concepto de poliedro regular

Analysis of the relation between image and definition in a problem mediated by GeoGebra from non-examples of regular polyhedron

Ana María Mántica[1]
Magali Lucrecia Freyre[2]

Resumen: Numerosos documentos regulatorios expresan una revalorización de la Geometría, tanto en el trabajo con materiales manipulativos como en el mediado por software de geometría dinámica. Dicha revalorización se plantea a través del diseño de situaciones que permitan la exploración, formulación y validación de conjeturas. Para abordar la noción de poliedro regular se elabora una situación problemática mediada por GeoGebra, dadas las ventajas que proporciona este entorno dinámico en cuanto al trabajo con figuras tridimensionales. Dicho entorno permite obtener una multiplicidad de casos con una única construcción si se utilizan propiedades geométricas. Se presenta el análisis de lo realizado por estudiantes de profesorado en matemática durante la resolución del problema. Se pretende determinar si sus imágenes están intrínsecamente controladas por el concepto empleando, registros escritos, grabaciones de audio y video, y protocolo de construcción de los archivos del software. Del análisis se desprende que en algunos estudiantes la integración entre imagen y concepto para el caso de poliedro y/o de poliedro regular particularmente, es incompleta.

Fecha de recepción: 21 de marzo de 2018. **Fecha de aceptación:** 4 de septiembre de 2018.
[1] Facultad de Humanidades y Ciencias, ana.mantica@gmail.com, orcid.org/0000-0001-5529-3515
[2] Facultad de Humanidades y Ciencias, magali.freyre@gmail.com, orcid.org/0000-0003-4195-2940

Palabras claves: *Concepto figural, poliedro regular, GeoGebra, construcciones tridimensionales, formación docente*

Abstract: Numerous regulatory documents express a revaluation of Geometry, not only when working with manipulative materials but also when dynamic geometric software mediates the work. We demonstrate it through the design of situations that allow exploration, formulation and validation of conjectures. To address the notion of regular polyhedron, we elaborated a problematic situation mediated by GeoGebra, due to the advantages that this dynamic environment provides when working with three-dimensional figures. This environment enables us to obtain a multiplicity of cases with a single construction provided geometric properties are used. We present an analysis of the tasks performed by prospective mathematics teachers during the resolution of the problem. Our aim is to determine whether their images are intrinsically governed by the concept, and to do so we have analyzed written records, audio and video recordings and the software construction protocol files. This analysis reveals that in the case of the polyhedron and/or of the regular polyhedron in particular, some students cannot achieve a complete integration between the image and the concept.

Keywords: *Figural concept, regular polyhedron, GeoGebra, three-dimensional constructions, prospective teacher training*

INTRODUCCIÓN

Distintos documentos regulatorios de Argentina de la escolaridad obligatoria de los últimos años (Núcleos de aprendizaje prioritarios (NAP), Tercer ciclo EGB 2004, NAP Ciclo Básico 2011, Ciclo Orientado 2012, Diseño curricular Educación Secundaria Orientada Provincia de Santa Fe, 2014 y versiones preliminares del último que datan de 2011, entre otros) ponen en valor el trabajo en Geometría y sugieren realizarlo mediante la utilización de elementos tradicionales y de software de geometría dinámica (SGD). A pesar de este reconocimiento, la enseñanza de la geometría tiene menos "presencia en las aulas" en comparación con la aritmética y el álgebra ya que generalmente se reduce el trabajo a la medida, como sostienen Itzcovich (2005, 2007), Schaefer y Sgreccia (2016) y más aún si se trata de geometría en tres dimensiones (Grossi y Sgreccia, 2016)

Con respecto a la intención de provocar cambios en la actitud por parte de los docentes en cuanto al trabajo en Geometría en la escolaridad obligatoria, Gutiérrez (2015) sostiene que "la reciente aparición de diversos programas de geometría dinámica 3-dimensional y el mayor uso de los ordenadores en los centros de educación primaria y educación secundaria pueden ayudar a superar los inconvenientes para enseñar geometría espacial". (p. 54)

En el presente artículo se analiza el desempeño de los estudiantes en una situación problemática que forma parte de una secuencia didáctica. El objetivo de este problema es resignificar la definición de poliedro regular a partir de la construcción de poliedros no regulares que cumplan sólo algunas de las condiciones exigidas por dicha definición, mediante el uso del software de geometría dinámica (en adelante SGD) GeoGebra.

Este tipo de figuras, denominadas en el presente artículo no ejemplos, son aquellos casos raros denominados "monstruos" por Lakatos (1978), quien sostiene que son figuras tridimensionales que no cumplen algún/os criterio/s de los establecido/s en la definición acordada. El uso de no ejemplos amplía el conjunto de figuras disponibles de un concepto, en este caso de poliedro regular, dado que en apariencia podría considerarse un ejemplo de esta familia, sin embargo analizando detenidamente la definición puede determinarse que no es un miembro de la misma. Las preguntas que guían esta investigación refieren a si el trabajo con no ejemplos contribuye a una mejor integración entre concepto y figura y por lo tanto si ayuda a una mejor formación del concepto figural de poliedro regular.

Con respecto a lo mencionado se afirma que una figura geométrica puede ser descripta como poseedora de propiedades intrínsecamente conceptuales, no obstante una figura geométrica incluye además una imagen basada en la experiencia sensitiva-sensorial, como la imagen de un dibujo y que el concepto está formado por la definición y las propiedades que se derivan de ella. Se apunta a que la figura considerada no sea una imagen cualquiera sino una estructura controlada lógicamente.

Para intentar lo anterior, se analiza lo acontecido durante el desarrollo de la actividad planteada en el contexto del dictado de la materia Geometría Euclídea Espacial, donde se utiliza GeoGebra de manera habitual para la construcción, formulación y validación de conjeturas por parte de los estudiantes. Esta asignatura corresponde a tercer año del profesorado en matemática de la

Universidad Nacional del Litoral (UNL), de la ciudad de Santa Fe. En el problema propuesto se pretende estudiar la formación de conceptos figurales, en particular el concepto de poliedro y, más específicamente, el de poliedro regular.

En este sentido, se analizan las producciones de los estudiantes (reunidos en grupos) teniendo en cuenta no sólo sus registros escritos y protocolos de construcción del software, sino también las grabaciones de audio y video y notas del observador, correspondientes al trabajo en grupos y a la puesta en común.

MARCO DE REFERENCIA

De acuerdo al objetivo planteado, se utilizan para el análisis dos aspectos: uno referido a la formación de conceptos geométricos y otro referido al aporte que el uso de un SGD brinda en esta formación.

En cuanto a la formación de conceptos geométricos, se consideran los aportes de Fischbein (1993) en lo que respecta a la construcción de concepto figural. Se retoman los aportes de Vinner y Dreyfus (1989) y Tall (1989) en lo referido al empleo de ejemplos y no ejemplos en la construcción del concepto. Y en lo que se refiere particularmente a la formación del concepto de poliedro regular se apela a los aportes de Guillen Soler (1997).

Primeramente, Fischbein (1993) sostiene que una figura geométrica puede ser descripta como poseedora de propiedades intrínsecamente conceptuales, no obstante esta figura no es sólo un concepto, es una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no tienen, pues incluye la representación mental de propiedades espaciales. Todas las figuras geométricas representan constructos mentales que poseen simultáneamente propiedades conceptuales y figurales. El término “concepto figural”, introducido por este autor, pretende enfatizar el hecho de que tratamos con un tipo particular de entidades mentales que no son reducibles ni a imágenes usuales ni a conceptos genuinos. La particularidad del concepto figural es que incluye la figura como propiedad intrínseca. Un concepto figural es un constructo mental caracterizado por todas las propiedades de los conceptos (generalidad, esencialidad, abstracción, idealidad), pero que al mismo tiempo preserva propiedades figurales (forma, distancia, posición). En principio, la fusión entre figura y concepto debería ser absoluta, ésta es una situación ideal que usualmente puede ser cumplida en la mente entrenada del matemático. Sin embargo, Fischbein (1993) sostiene que la interpretación de la componente figural de una figura geométrica debería quedar enteramente sometida a las restricciones formales. Esa idea no es siempre entendida, y es frecuentemente olvidada por el estudiante. En general, se tiende a olvidar la definición bajo la presión de las restricciones figurales, esto representa un obstáculo grave en el razonamiento geométrico.

Seguidamente, Vinner y Dreyfus (1989) expresan que, si bien las definiciones son desarrolladas en clase, los alumnos no necesariamente las utilizan para decidir si un objeto matemático dado es un ejemplo o no de un concepto. En la mayoría de los casos deciden basándose en la imagen conceptual, que es el conjunto de todas las figuras mentales (gráfica, simbólica, etc.) del estudiante relacionadas con el nombre del concepto. junto con todas las propiedades que lo caracterizan. Esta imagen es el resultado de sus experiencias con ejemplos y no ejemplos del concepto. Así, el conjunto de objetos matemáticos considerados por el estudiante como ejemplos del concepto no es necesariamente el mismo que el conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición. En este caso, el accionar de los estudiantes podría diferir de lo que el docente espera. Es importante entonces entender por qué difieren y para esto se estudian las imágenes que los estudiantes poseen de los conceptos matemáticos.

Asimismo, Tall (1989) afirma que muchas de las piezas de aparatos concretos que se usan en la enseñanza de la matemática se focalizan más en lo que el concepto es y no en lo que no es. De esta manera, los no ejemplos de los conceptos parecen tener poca relevancia. El autor expresa la importancia de la manipulación por parte del alumno de ejemplos y, en el caso de ser posible, de no ejemplos de un concepto matemático específico o de un sistema de conceptos relacionados. Se requiere así de un balance adecuado entre la variedad de ejemplos y de no ejemplos propuestos para la formación de una imagen coherente del concepto involucrado. Esto contribuye a que el estudiante gane experiencias que le provean de una estructura cognitiva, la cual le permita construir los conceptos más abstractos.

Posteriormente, Guillén Soler (1997) sostiene que la imagen que se forma de un concepto se basa en atributos críticos y no críticos. Estos últimos se dan por casualidad e influyen en reconocer ejemplos del concepto. Por este motivo, resulta importante presentar variados ejemplos posibles ya que “la imagen que uno se va formando de un concepto se afina, amplía y cambia a medida que se va ampliando el mundo de ejemplos posibles”. (p.18)

En cuanto al aporte que un SGD brinda a la construcción de un concepto geométrico, se considera a Sessa, Borsani, Cedrón, Cicala, Di Rico y Duarte (2015) y Gutiérrez y Jaime (2015).

Sessa *et al.* (2015) expresan que los SGD plantean nuevos horizontes posibles para el trabajo en el aula de matemática y permiten pensar en tareas que sin estas herramientas serían impensadas. Manifiestan que las intenciones didácticas se modifican al verse enriquecidas por el uso del software. Sostienen que las figuras dinámicas construidas en SGD representan modelos recortados de los problemas en estudio. El trabajo del docente debe dejar en claro a los estudiantes que la construcción en el SGD no es suficiente para realizar determinadas afirmaciones, sino que éstas deben estar apuntaladas por cierta racionalidad matemática. Es intención que los alumnos vayan "construyendo una mirada crítica sobre las respuestas del software, relacionándolas con los conocimientos que tienen sobre los objetos matemáticos que se ponen juego". (p.159)

Gutiérrez y Jaime (2015) analizan el uso de software de geometría dinámica tridimensional para la enseñanza de la geometría espacial. Afirman que la aparición de estos programas informáticos permiten que los estudiantes exploren y experimenten más activamente, junto a los materiales didácticos tradicionales, en entornos de enseñanza más interesantes que le permitan al alumno construir nuevos conocimientos. Así, puede contribuir a superar algunos inconvenientes en la enseñanza de la geometría espacial que derivan de manejar las representaciones en papel de cuerpos espaciales o de la escasez de material manipulativo en algunos casos. Estos autores mencionan que las formas de enseñanza o aprendizaje en geometría dinámica plana no pueden extrapolarse a la geometría espacial y, como consecuencia, resulta necesario que las manipulaciones dinámicas (que ofrece el trabajo con el software) ayuden a eliminar imágenes falsas, mejorar dibujos en papel de estructuras tridimensionales y a enriquecer las imágenes conceptuales de los conceptos involucrados.

METODOLOGÍA

La presente investigación es cualitativa interactiva, ya que "consiste en un estudio en profundidad mediante el empleo de técnicas cara a cara para recoger los datos de la gente en sus escenarios naturales" (Mc Millan y Schumacher, 2005, p.44). Se describe el contexto del estudio y las perspectivas de los informantes. Asimismo, se trata además de una investigación aplicada ya que "se centra en un campo de práctica habitual y se preocupa por el desarrollo y la aplicación del conocimiento obtenido en la investigación sobre dicha práctica" (p.23)

Los sujetos de estudio de la investigación son alumnos del profesorado en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL que cursan la cátedra Geometría Euclídea Espacial (GEE), correspondiente al tercer año de la carrera. La elección de los sujetos de estudio se da al considerar el acceso que los investigadores tienen a dicha cátedra y, además, porque se tiene en cuenta que estos estudiantes de profesorado realizan actividades (en el marco de la cátedra) que son de interés según los objetivos planteados para la investigación.

El plan de cátedra de la asignatura da cuenta de que, en el cursado, se utiliza un apunte de cátedra y, como complemento en algunos temas particulares, el libro *Geometría métrica, tomo I Fundamentos*, de Puig Adam (1980). Además de utilizar materiales manipulativos, se emplea el software GeoGebra, de código abierto y disponible de manera gratuita, que permite construcciones dinámicas utilizando definiciones y propiedades geométricas en el plano y en el espacio. El uso de este software en la materia es transversal, ya que está incluido tanto en las instancias de clases como en las de evaluación. Se considera fundamental para la elaboración de conjeturas y pruebas de propiedades que posteriormente son formalizadas con rigurosidad matemática. La elaboración de conjeturas se ve beneficiada por el aspecto dinámico que ofrece el software al posibilitar un desplazamiento en la pantalla de elementos libres, este desplazamiento permite visualizar una multiplicidad de figuras que cumplen las propiedades que son consideradas para su construcción.

Respecto al tema "poliedros" en particular, puede observarse, en el material de cátedra, que los estudiantes definen superficie poliédrica cóncava y convexa y poliedro convexo, analizan distintas demostraciones del teorema de Euler y definen poliedros eulerianos. A partir de esto demuestran que no sería posible que existan más de cinco poliedros que tengan sus caras iguales y que en cada vértice concurra el mismo número de ellas, en particular si esas caras son polígonos regulares. De esta manera, concluyen que dichos poliedros son regulares; definiendo poliedros regulares convexos. Continúan con transformaciones geométricas y sus propiedades, lo que les permite trabajar con las relaciones de paralelismo y perpendicularidad. Definen familias de poliedros particulares y prueban propiedades de las mismas (prisma, pirámide, tronco de pirámide), estudian además los cuerpos redondos (cilindro, cono, tronco de cono y esfera) y el caso particular de la geometría en la superficie esférica. Prueban luego la existencia de los cinco poliedros regulares a partir de lo planteado en el texto de Puig Adam (1980), construyendo cada uno de ellos en función de las definiciones y propiedades disponibles. Por último, trabajan una unidad sobre medida, en la que obtienen las fórmulas que permiten el cálculo de área y volumen de los poliedros y cuerpos redondos estudiados en la cátedra.

La situación problemática involucrada en el presente trabajo, que se explicita más adelante, es abordada por los estudiantes en el marco de un taller obligatorio con el uso de GeoGebra que se propone en la misma cátedra.

Los estudiantes trabajan, en una primera instancia, en grupos de dos para la resolución del problema y, en una segunda instancia, socializan a la clase sus producciones.

La técnica que se emplea para el registro de datos es la observación participante. El investigador tiene una participación activa, apela a la escritura de extensas notas de campo durante la implementación de las actividades para documentar lo que acontece en el desarrollo de las tareas: interacciones, intervenciones, acciones y otros tipos de aportes de todos los participantes. Además de estos registros escritos se incluyen las grabaciones de audio y video de las clases en las que se efectúan las tareas, los archivos que producen los alumnos con el software y sus registros escritos mientras resuelven la actividad. Vale aclarar que los estudiantes participantes dan su consentimiento para que su trabajo sea grabado y filmado, y para que el material recogido sea utilizado para difundir los resultados del proyecto de investigación.

En seguida, se realiza un análisis cualitativo de los datos que tiene como propósito comprender el contexto que los rodea y describir las experiencias de los estudiantes, relacionando los resultados de dicho análisis con el marco teórico elegido.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

El problema presentado forma parte de una secuencia didáctica que tiene como objetivo resignificar la definición de poliedro regular a partir de la construcción de poliedros no regulares que cumplan sólo algunas de las condiciones exigidas por la definición, con el uso de software de geometría dinámica. Esta secuencia forma parte de un trabajo de investigación más amplio que tiene como objetivo analizar si los estudiantes tienen construido el concepto figural de poliedro.

Propuesta de trabajo

Considerando que la situación problemática, que se presenta en este artículo, aborda el concepto de poliedro regular, se tienen en cuenta los aportes de Guillén Soler (1997) quien hace una clasificación de poliedros regulares y no regulares atendiendo a las características de la definición. En este sentido, se propone una clasificación con las características de los poliedros involucrados en los problemas que se plantean en el taller.

En esta asignatura se consideran poliedros regulares convexos, aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas. En las actividades presentadas en el taller se proponen construcciones de poliedros que cumplen sólo dos de estas tres condiciones, por lo que no son regulares. Se realiza una categorización de poliedros a los efectos de analizar los tipos de no ejemplos que podrían proponerse. Se considera no ejemplo de un poliedro regular a un poliedro que cumple una o dos de las tres condiciones exigidas por la definición de poliedro regular pero no las tres.

A continuación se presenta la categorización que tiene en cuenta solamente aquellos poliedros que surgen de cumplir únicamente dos condiciones exigidas para la regularidad, dado que corresponde al problema involucrado en este artículo. Las condiciones exigidas son:

X: Sus caras son polígonos regulares.

Y: Sus caras son polígonos iguales.

Z: En cada vértice concurren el mismo número de caras.

Tipo	X	Y	Z	Denominación
1	Si	No	Si	No regular Tipo 1
2	Si	Si	No	No regular Tipo 2
3	No	Si	Si	No regular Tipo 3

Figura 1. Posibles poliedros

Los problemas de la secuencia plantean una reflexión acerca de las condiciones que debe cumplir un poliedro para ser regular, esto contribuye a que se generalice el objeto mental de esta determinada familia de sólidos. Así, "se pretende que los estudiantes incluyan en el objeto mental correspondiente todos los ejemplos de la familia de sólidos, en diferentes posiciones, junto con propiedades de la familia y relaciones de sus elementos o con ejemplos de otras familias". (Guillén Soler, 2000, p.50)

El problema presentado se relaciona con la existencia y construcción de poliedros no regulares de los denominados tipo 2.

Consigna del problema
Construir, si es posible, un poliedro no regular de modo que todas sus caras sean triángulos equiláteros iguales.

a) Si no es posible, justifica la no existencia.
b) Si es posible:
   i. Indica qué condiciones son necesarias para construirlo.[3]
   ii. Analiza si el poliedro es único.
   iii. Justifica por qué el poliedro obtenido no es regular.

Análisis de lo realizado por los estudiantes:

A continuación se expone y se transcribe lo realizado por los seis estudiantes que cursan la asignatura, quienes se reúnen en grupos de dos integrantes para resolver el problema, y que posteriormente socializan sus producciones al grupo clase.

Se aclara que los fragmentos de diálogos textuales[4] que se expresan están representados utilizando para cada estudiante la primer letra de su nombre y para el docente utilizando la letra P.

Grupo D y A

Los estudiantes leen la consigna y recurren al docente para comentar su interpretación. Acuden a la definición de poliedro regular, determinando la condición que no debe cumplir según la consigna.

---

[3] En el desarrollo de la asignatura se plantean habitualmente problemas de construcciones con el objetivo de problematizar y potenciar los objetos matemáticos involucrados. Se parte del supuesto de que bajo ciertas condiciones las construcciones con elementos clásicos de geometría o software de Geometría Dinámica permiten explorar, identificar, conjeturar y validar propiedades de dichos objetos geométricos. La secuencia en la que se enmarca el problema exige el uso del SGD GeoGebra.

[4] La forma lingüística empleada es la variedad dialectal del español rioplatense.

> *A: - Un poliedro no regular de modo que sus caras sean triángulos equiláteros iguales. Para que un poliedro sea no regular no se tiene que cumplir una de estas dos condiciones: que sus caras sean polígonos regulares iguales, eso sí o sí pasa porque son triángulos equiláteros iguales. Y la otra, en sus* vértices concurren el mismo número de aristas. Debe*ría no cumplirse esta condición.*

Comienzan pensando en la modificación de un tetraedro regular para que no se cumpla la condición que en cada vértice concurran el mismo número de caras. Piensan en agregar triángulos equiláteros de modo que en el vértice que están considerando concurran más de tres aristas, lo cual les parece imposible en un comienzo. Se posicionan en un vértice de un tetraedro regular e intentan abrir el triedro de manera tal que se agreguen más caras (fig. 2). Así pretenden construir una pirámide cuyas caras sean triángulos equiláteros iguales pero encuentran que no es posible de esta manera que la base sea un triángulo. El problema es que esta cara no les permite cerrar la figura tridimensional que están construyendo y por tanto no quedaría determinado un poliedro. Esto evidencia que los alumnos tienen construida una imagen de poliedro como figura tridimensional cerrada.

> *A: - Lo que yo pienso no se puede, es decir, no nos entra en la cabeza. Vos tenés un triángulo equilátero abajo y lo pensamos como un tetraedro regular. Tenés la cara así y si lo abrimos para meterle más caras, éste que está así…*[5] *acá tiene que entrar otro triángulo equilátero, y acá otro… porque todas las caras tienen que ser triángulos equiláteros iguales.*

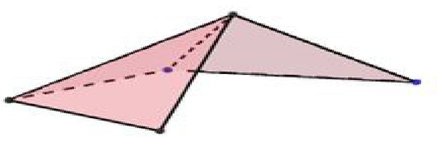


Figura 2. Triedro considerado

[5] Se posicionan en un triedro del tetraedro.

Los alumnos descartan este procedimiento. Retoman nuevamente el tetraedro regular y realizan una simetría central respecto de uno de sus vértices. En la figura obtenida intentan nuevamente abrir los triedros opuestos por el vértice para agregar triángulos, pero se dan cuenta que esto no los conduce a una construcción que cumpla las condiciones solicitadas en la consigna. Luego recurren a otro concepto trabajado en la asignatura que es el Teorema de Euler. Como este teorema es válido para todos los poliedros convexos, no solo para los regulares, lo descartan. Se evidencia que no logran, en un comienzo, desprenderse de la imagen del tetraedro regular y esto les impide visualizar una construcción que cumpla la consigna. Continúan debatiendo, pero siempre considerando la posibilidad de agregar más caras que concurran en un vértice de un tetraedro regular para negar la condición que en todos los vértices concurran el mismo número de caras.

Iniciada la puesta en común, uno de los integrantes del grupo continúa trabajando con el software y logra una construcción correcta, que explica posteriormente al resto de la clase. En ningún momento debate con su compañera acerca del poliedro construido, que es una bipirámide.[6] Se evidencia que siempre piensan en el tetraedro regular, primero, en agregarle caras y luego en "acoplarle" (término utilizado por el alumno) otro tetraedro regular, unido por una cara.

Figura 3. Puesta en común Grupo D y A

[6] "Las bipirámides son las formas que se obtienen cuando se juntan dos pirámides de bases iguales, de manera que ajusten completamente sus bases"(Guillén Soler, 1997: 18)

Luego justifica utilizando propiedades geométricas cómo obtendría, a partir de un tetraedro regular, la bipirámide.

Se considera que la construcción del poliedro obtenido puede estar influenciada por la demostración realizada para probar la existencia del octaedro regular en la que se parte de dos pirámides cuadradas unidas por la base.

El alumno, en la puesta en común, primero expone cómo le quedó el poliedro y después fundamenta cómo hace para obtenerlo. Expresa que obtuvo el poliedro que cumple las condiciones pedidas de la siguiente manera:

> *A: - Partimos de un tetraedro regular, usamos el comando de tetraedro regular y lo que hicimos fue acoplarle el mismo pero le aplicamos una simetría especular respecto del plano que contiene a la base. Nos quedó este poliedro. En este vértice concurren las tres aristas del primer tetraedro, y en éste... uno, dos, tres, cuatro. Está formado por triángulos equiláteros como lo pedía el enunciado pero no es un poliedro regular convexo.*
>
> *D: - Ah, parece un octaedro, solo que tiene tres caras arriba y tres abajo.*

En la puesta en común, cuando el alumno explica, se evidencia que la imagen que tiene de poliedro regular pareciera estar controlada por la definición, dado que siempre contrapone la imagen y la definición. Por esto, logra descartar las primeras imágenes de poliedros que trabaja agregando caras a los triedros cuyos vértices coinciden con los vértices del tetraedro regular porque siempre compara la imagen obtenida con su imagen de poliedro como figura cerrada.

La asociación entre la imagen del octaedro, la definición de poliedro regular y lo solicitado por la consigna permite que encuentre este poliedro (bipirámide) que surge de "acoplar" dos tetraedros regulares.

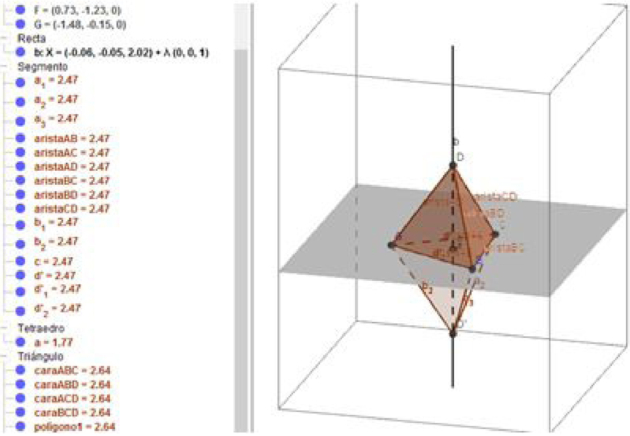


Figura 4. Protocolo de construcción de bipirámide

Si bien el estudiante pone en valor su imagen de poliedro para la construcción y para la justificación del poliedro obtenido que cumple las condiciones solicitadas en el problema, en la puesta en común hace referencia a la definición y a la figura logrando una buena fusión entre ambas.

Vale aclarar que no hace referencia a la problemática de la unicidad en sus conclusiones ni reflexiona expresamente sobre las condiciones necesarias para la construcción. Esto puede deberse a que la construcción de la bipirámide la realiza uno de los estudiantes del grupo minutos antes de su exposición.

Grupo T y M

Las alumnas comienzan a pensar en el posible poliedro no regular tipo 2 (X, Y, no Z) haciendo referencia a la definición de poliedro convexo.

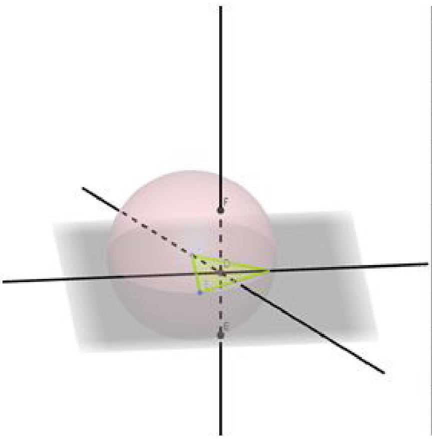
M: - El poliedro regular es el que deja a las otras caras en el mismo semiespacio.

En la cátedra, se trabaja la definición de poliedro regular convexo, y es tal vez por esta razón que las alumnas parecieran estar considerando la condición de convexidad de un poliedro para abordar el problema.

Continúan dialogando acerca de una posible construcción, recurriendo al tetraedro regular y analizando cómo modificarlo para que no se cumpla la condición que en cada vértice concurra el mismo número de caras. A esta construcción la llaman "reloj de arena".

M: - Podrías hacer la pirámide, o sea el tetraedro de triángulos equiláteros, y el opuesto también. ¿Viste como el reloj de arena?[7] Es un no regular y todas sus caras son triángulos.
T:- ¿Por qué es un no regular?
T: - Porque en un vértice, el del medio,[8] no van tres caras, van muchas más.

Las alumnas construyen el tetraedro regular siguiendo los mismos pasos que hicieron en clases anteriores para probar la existencia de dicho poliedro tal como se observa en el protocolo de construcción.



Nº	Nombre	Descripción	Valor
1	Punto A	Punto sobre EjeX	A = (1, 0)
2	Punto B	Punto sobre EjeX	B = (3, 0)
3	Polígono polígono1	Polígono(A, B, 3)	polígono1 = 1.73
3	Segmento f	Segmento [A, B]	f = 2
3	Segmento g	Segmento [B, C]	g = 2
3	Punto C	Polígono(A, B, 3)	C = (2, 1.73)
3	Segmento h	Segmento [C, A]	h = 2
4	Recta i	Bisectriz de A, C, B	i: x = 2
5	Recta j	Bisectriz de B, A, C	j: -0.5x + 0.87y = -0.5
6	Punto D	Intersección de j, i	D = (2, 0.58, 0)
7	Recta k	Recta que pasa por D perpendicular a Plano xOy	k: X = (2, 0.58, 0) + λ(0, 0, 1)
8	Esfera a	Esfera a través de B con centro en A	a: (x - 1)² + y² + z² = 4
9	Punto E	Punto de intersección de a, k	E = (2, 0.58, -1.63)
9	Punto F	Punto de intersección de a, k	F = (2, 0.58, 1.63)

Figura 5. Protocolo de construcción tetraedro regular

Las estudiantes intercambian ideas acerca de qué simetría utilizar para obtener el poliedro cuya imagen es la que se asemeja a un "reloj de arena". Aseguran que cumple la condición pedida aceptando que la figura construida es un

[7] Se refieren a dos tetraedros que tienen en común sólo un vértice.
[8] Se refiere al vértice compartido por los dos ángulos triedros.

poliedro y retoman la definición de poliedro regular para justificar su afirmación.

> *T: - No es regular.*
> *M:* - ¿Por qué sabemos que no es regular?
> *T: - Porque en el vértice H concurren 6 caras y en los demás sólo 3. además...poliedros regulares son aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.*
> *M: - Entonces, ¿No es regular, o no es convexo?*
> *T:* - ¿Dónde estaba la definición *de poliedro regular? Porque ésta es la de poliedro regular convexo.*

Las estudiantes preguntan al docente acerca de la definición de poliedro regular. Se analiza que el tetraedro regular siempre es convexo.

Las alumnas centran la discusión en la concavidad o convexidad de la figura tridimensional obtenida. Si bien la figura construida no se corresponde con las imágenes habituales de poliedro, las estudiantes no se cuestionan en ningún momento si la misma cumple las condiciones exigidas por las definiciones consideradas en la cátedra.[9]

A lo largo de la escolaridad, en general, se presentan ejemplos estereotipados de poliedros contando en escasas o en ninguna ocasión con no ejemplos. En particular, los poliedros con los que se trabajan suelen ser convexos.

La construcción que realizan se corresponde con uno de los monstruos que menciona Lakatos (1978) que está constituido por dos "gemelos" conectados por un vértice. Utilizaremos este término en el texto para referirnos a esta figura tridimensional al trabajar en la puesta en común.

[9] Llamaremos superficie poliédrica al conjunto de un número finito de polígonos, llamados caras de la superficie, que cumplan las siguientes condiciones: Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo otra (caras contiguas); y dos caras contiguas están en distinto plano. La superficie se llama convexa si además se cumple que el plano de cada cara deja en un mismo semiespacio a las demás.

Llamaremos poliedro convexo al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiespacios. Los vértices y lados de las caras se llaman vértices y aristas del poliedro. (Mántica y Götte, 2017)

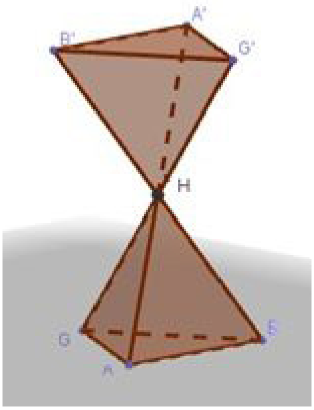


Figura 6. "Gemelos" conectados por un vértice

Una vez construida una figura que consideran solución del problema, comienzan a analizar si esa construcción es o no única. Para esto, deciden efectuar otra construcción. Esto puede tener que ver con lo realizado para probar la existencia de los poliedros regulares, los cuales fueron construidos con este propósito.

T: - ¿Querés que lo construyamos?
M: - Sí, total lo hacemos como lo hicimos hoy, para mostrar.
T: - Entonces en vez de trazar una perpendicular trazá una chanfleada.[10]

Con esas consideraciones realizan una nueva construcción que se expone a continuación. Vale aclarar que si bien la idea es correcta, en los procedimientos empleados no tienen en cuenta para uno de los tetraedros que sus caras sean triángulos equiláteros.

[10] Se refieren a una recta que pase por H no perpendicular al plano que contiene al triángulo GAB.

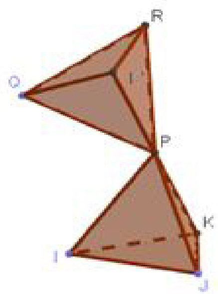


Figura 7. Variación de los "gemelos" conectados por un vértice

A continuación, reflexionan sobre la existencia de otro poliedro que cumpla las condiciones establecidas. Piensan en el tetraedro, y a partir de él, qué construcción podrían realizar de modo que en un vértice concurran más de tres caras. Plantean que los tetraedros podrían estar unidos por una arista, de modo que en la misma concurran más de dos caras. Si bien no lo construyen en GeoGebra, realizan un dibujo en la hoja que se corresponde con la figura que Lakatos llama "gemelos" conectados por una arista, nombre que utilizaremos para nombrar esta figura tridimensional.

> *M: - Yo podría decir que en una arista concurran más de dos caras. Porque en vez de hacerlo por el vértice podría haberlo hecho por la arista. En un vértice vuelven a concurrir más de tres caras.*

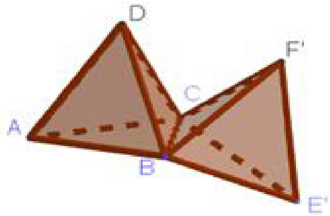


Figura 8. "Gemelos" conectados por una arista

La construcción no cumple la condición que cada lado de una cara pertenece a otra y sólo a otra siendo estas caras contiguas porque en el caso representado algunas caras comparten un lado con más de una cara.

Las estudiantes continúan su debate, planteando que una arista puede ser compartida por más de dos caras. Recurren a la definición de superficie poliédrica y de poliedro convexo en la que se expresa que cada lado de una cara pertenece a otra y sólo a otra. No obstante, después de leer la definición continúan sosteniendo que una arista puede ser compartida por más de dos caras.

Lo expresado anteriormente puede verse en su conclusión escrita en la cual se evidencia la posibilidad de construcción de los dos tipos de "gemelos" aunque uno no sea construido en GeoGebra. (fig. 9)

Se puede apreciar que las estudiantes T y M no poseen el concepto figural de poliedro que según Fischbein (1993) constituye la integración entre imagen y concepto. Las estudiantes no reflexionan acerca de esta construcción teniendo en cuenta la definición de poliedro y las imágenes relacionadas con las que habitualmente se encuentran.

Luego de estas construcciones, vuelven a considerar la posibilidad de otra solución para la consigna, en este caso, realizan una bipirámide. Lo hacen teniendo en cuenta el simétrico de un vértice del tetraedro regular respecto del plano que contiene a la cara del mismo que no contiene a dicho vértice.

Manifiestan que esta construcción surge de lo realizado en la prueba de la existencia del octaedro regular.

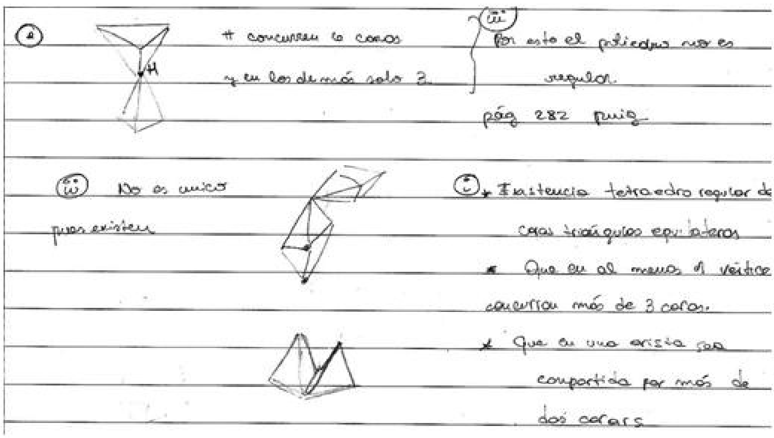


Figura 9. Conclusión escrita Grupo T y M

En la puesta en común expresan haber encontrado más de una solución al problema. Comienzan presentando los "gemelos": los conectados por un vértice y los conectados por una arista. En este caso el docente cuestiona si estas figuras tridimensionales son o no poliedros. Para esto recurre a la definición de superficie poliédrica (dado que solo se define poliedro convexo) lo que propicia un momento de debate y reflexión por parte de los alumnos. El estudiante A expresa que en los gemelos por la arista no se cumple la condición que cada lado de una cara pertenece a otra y sólo a otra, y por esta razón estos gemelos no se corresponden con la definición. Si bien es el estudiante A quien expresa por qué la figura 8 no es poliedro, luego de su intervención, el resto de la clase acuerda con que esta figura no es un poliedro.

En este caso la figura realizada por los estudiantes se corresponde con lo que han definido como superficie poliédrica no convexa, sin embargo la discusión no se centra en las definiciones que disponen de superficie poliédrica y poliedro convexo. Ello podría llevarlos a la búsqueda de una definición de poliedro, que incluya a poliedros no convexos. Esta discusión genera que la cátedra revise y reelabore las definiciones disponibles. Se establecen las siguientes definiciones:

"Llamaremos **superficie poliédrica** al conjunto de un número finito de **polígonos**, llamados **caras** de la superficie, que cumplan las siguientes condiciones:

- Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo otra. Ambas caras se llaman contiguas.
- Dos caras contiguas están en distinto plano.
- Dos caras no contiguas pueden unirse por una sucesión de caras contiguas.
- Dos caras no contiguas no pueden tener más punto común que un vértice y si lo tienen deben pertenecer ambas a un mismo ángulo poliedro.

La superficie poliédrica se llama **convexa** si además de las condiciones de la definición anterior se cumple que el plano de cada cara deja en un mismo semiespacio a las demás.

Llamaremos **poliedro** al conjunto de los puntos de la superficie poliédrica y los interiores a la misma. Los vértices y lados de las caras se llaman vértices y aristas del poliedro.

Si la superficie que determina al poliedro es convexa el **poliedro** se llama **convexo**. De lo contrario lo denominaremos **poliedro cóncavo"**. (Mántica y Götte, 2018)

Las definiciones que se revisan atienden por un lado a descartar a los "gemelos por un vértice" que no se corresponden, en general, con las imágenes usuales de poliedros. Para esto se introducen mas requisitos en la definición de superficie poliédrica. Por otro lado, para subsanar el "agujero" que ocasionan las definiciones empleadas anteriormente que solo contemplan a los poliedros convexos, se incorpora la definición de poliedro. Una cuestión a destacar es que las reflexiones de los estudiantes llevan a la revisión del material teórico utilizado por la cátedra.

Grupo G y C

Este grupo, para resolver la consigna, recurre a la imagen visual que tiene de prisma, que es una imagen estereotipada. Consideran un prisma apoyado sobre una de sus bases utilizando las expresiones "arriba" y "abajo" para referirse a las mismas. Manifiestan que el prisma al igual que el tetraedro es un poliedro. Recurren a poliedros conocidos y a partir de ellos obtienen otro que cumpla la consigna.

G: - Un poliedro no regular... ¿Un tetraedro es un poliedro?
C:- Los que son así iguales arriba y abajo ¿Cómo se llaman?
G: - Prismas, que también es un poliedro...

Analizan que para que un poliedro sea regular debe cumplir solamente la condición que las caras sean polígonos regulares iguales. No recurren al material teórico de modo de considerar la definición donde se establecen todas las condiciones. No conciben en un principio la posibilidad de construir el poliedro que pide la consigna.

C: - El tema es que dice que las caras sean triángulos equiláteros iguales, éste es un triángulo, éste también tiene que ser un triángulo...
G: - Pero no es posible que no sea regular, si sus caras son triángulos equiláteros iguales...

Consideran la posibilidad que se pueda partir de un prisma para obtener el poliedro. Nuevamente utilizan la imagen visual que tienen de prisma pero en ningún momento hacen referencia a su definición.

C: - Por eso no se puede, ponele que vos tenés en esta cara un triángulo equilátero. Aunque podría ser un prisma...
G: - No, porque tienen que ser todas sus caras iguales, y van a ser triángulos. No, un prisma no me parece. Si es un prisma vas a tener cuadrados, rectángulos, como caras.

Vuelven a leer la consigna y se centran en el punto en el cual se cuestionan si la construcción es única y recurren a otra familia de poliedros trabajados: pirámide. Pareciera que el trabajo con las familias de prismas y pirámides influye en el conjunto de imágenes disponibles de poliedro limitando ejemplos que no pertenezcan a estas familias.

C: - Y si yo hago tipo un tetraedro, me queda un tetraedro regular que es lo que no quiere. y otra cosa...sí, dice aparte analizar si el poliedro es único...
G: - ¿Qué otro poliedro puede ser?
C: - Prisma...

Trabajan con el software y descubren la herramienta *Desarrollo*. Comienzan a indagar sobre desarrollos planos de poliedros de fácil construcción en el software.

G: - Te está diciendo caras iguales...
C: - Tenemos poliedros, pueden ser una pirámide o un prisma, nada más.
G: - Mirá este desarrollo...[11]
C: - A ver...
G: - Pero no sé lo que tengo que hacer... ¡Ah! yo dibujo el poliedro y me hace el desarrollo...

Vuelven a considerar el poliedro regular sin recurrir a la definición, por tanto, tienen la imagen de los cinco poliedros regulares y consideran que negar la regularidad equivale a que las caras no sean iguales.

[11] Se refiere al desarrollo plano en el software de algún poliedro.

C: - Pero no te puede decir en la consigna que no se puede...poliedro no regular... sus caras no son iguales... y acá dice que las caras sean iguales...
G: - Si un poliedro va a tener triángulos equiláteros... todos iguales, ponele no me importa cuántos sean, pero tienen que ser iguales.

Descartan el tetraedro y continúan recurriendo a otros poliedros regulares cuyas caras son triángulos equiláteros, con la intención de obtener el poliedro solicitado.

G: - ¿Cuál es el poliedro que tiene una pirámide arriba y abajo?
C: - El icosaedro creo que es.
G: - ¿Es regular? Sí, es un poliedro convexo regular.
C: - Yo digo éste..[12].
G: - Ah, el octaedro...
C:-¡Ah! porque las caras son triángulos, y ésta del medio no es una cara, el cuadrado.

Puede decirse que vuelven constantemente a sus imágenes de poliedros regulares pero desde una visión global de las mismas considerando sólo forma y regularidad de las caras. No tienen en cuenta que en el texto disponible está la definición de poliedro regular que les permitiría hacer visible la condición que no están considerando: en cada vértice de un poliedro regular concurre el mismo número de caras.

G: - Nosotros queremos que las caras sean triángulos equiláteros iguales y que sea un poliedro no regular...
C: - ¿Pero no es que cuando un poliedro tiene todas las caras iguales es regular?
G: - Pero capaz son equiláteros no todos iguales...
C: - Pero acá te dice equiláteros iguales.

Las alumnas continúan debatiendo haciendo referencia a los cinco poliedros regulares, en particular a los polígonos que forman sus caras.

Recurren a la definición de poliedro regular por una sugerencia de la docente luego de haber transcurrido aproximadamente diez minutos de debatir acerca de la posibilidad de solución del problema.

[12] Se refiere a una imagen del material teórico.

P:- ¿Qué dice la definición de poliedro regular? Porque la semana pasada hicimos las construcciones...

La componente figural que las alumnas tienen de poliedro regular es para ellas suficiente y por tanto no sienten la necesidad de acudir a la definición. Parecería ser un impedimento para lograr una adecuada fusión entre la imagen y la definición de poliedro regular que les permita pensar en poliedros que no cumplen alguna de las condiciones exigidas en la definición. La imagen visual que tienen de poliedro regular es tan resistente y estereotipada que condiciona un análisis minucioso de la definición y por tanto el concepto figural que logran es incorrecto.

Luego de leer la definición por la sugerencia de la docente, inmediatamente encuentran una imagen de un poliedro que cumple la condición solicitada en el problema y realizan la construcción del mismo en el software sin mayores inconvenientes.

Las alumnas consideran una pirámide triangular cuyas caras son triángulos equiláteros iguales y en cuyos vértices concurren tres caras, es decir, un tetraedro regular. No obstante, no utilizan en el software la herramienta *Tetraedro*. Construyen la pirámide triangular empleando el mismo método que utilizaron la clase anterior para probar la existencia del tetraedro regular. Luego utilizan una esfera para determinar los dos vértices faltantes (fig. 10).

En la puesta en común, presentan su construcción explicando los procedimientos empleados y justifican por qué cumple con lo exigido por la consigna. Manifiestan no haber analizado la condición de unicidad por falta de tiempo.

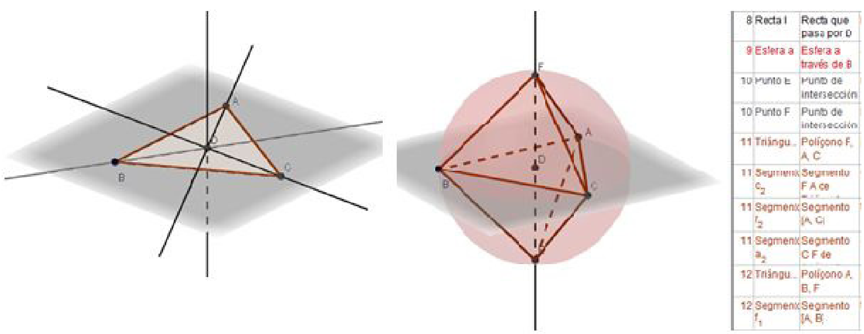


Figura 10. Construcción de bipirámide

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo del problema de este trabajo es resignificar la definición de poliedro regular a partir de la construcción de poliedros no regulares que cumplan sólo algunas de las condiciones exigidas por la definición con el uso de GeoGebra. En el análisis se tienen en cuenta dos aspectos, por un lado, la formación de los conceptos geométricos de los estudiantes considerando la fusión que existe entre la figura y la definición del concepto de poliedro regular se hace hincapié especialmente en el uso de no ejemplos; y por otro lado, el uso de un software dinámico en la construcción de dicho concepto. A continuación se expresan algunas reflexiones teniendo en cuenta el objetivo y aspectos considerados para el análisis.

Respecto a la relación imagen, definición y concepto figural

En algunos estudiantes se evidencia una dificultad en la construcción del concepto figural de poliedro que es previo al de poliedro regular. Se observa que los estudiantes no tienden a recurrir a las definiciones disponibles para construir las figuras tridimensionales solicitadas. Si bien las construcciones realizadas no son las que habitualmente encuentran en los textos y actividades usuales, es llamativo que los estudiantes no se cuestionen si éstas son o no poliedros. Esto podría deberse a que sólo disponen de la definición de poliedro convexo, no obstante, podrían recurrir a la definición de superficie poliédrica que sí se da en general.

La construcción de los "gemelos" conectados por un vértice que realiza el grupo T y M es relacionada con un elemento conocido por ellas, que es el "reloj de arena". Esto representa una superficie poliédrica de acuerdo a la definición acordada por la cátedra, sin embargo, las estudiantes no recurren a la definición y esto se evidencia en la construcción de los "gemelos" conectados por una arista, figura que no cumple con la definición de superficie poliédrica. Fischbein (1993) sostiene que algunos errores en el razonamiento geométrico que tienen los estudiantes, pueden explicarse con la falta de congruencia entre el aspecto conceptual y figural de los conceptos figurales, en este caso relacionado al concepto de superficie poliédrica.

Por lo tanto, se considera que el hacer hincapié en poliedros convexos podría limitar el conjunto de imágenes con las que interactúan los estudiantes, influyendo en el concepto figural de poliedro construido lo que representa una limitación para la resolución del problema.

La estructura figural que poseen los estudiantes del grupo T y M de poliedro domina la dinámica del razonamiento ya que pareciera que éste último no está controlado por las restricciones formales que impone la definición. Se destaca que los alumnos cuentan con el apunte de cátedra en el que tienen disponibles las definiciones lo que les permitiría revisar si las construcciones cumplen con las condiciones exigidas por éstas.

A los estudiantes del grupo G y C no les es posible, en un principio, pensar en una imagen que cumpla sólo alguna de las condiciones que establece la definición de poliedro regular ya que sostienen que si las caras son polígonos regulares iguales sólo es posible que el poliedro sea regular. Luego de la intervención del docente, estos estudiantes comienzan a considerar la definición lo que les permite realizar una construcción adecuada.

Fischbein (1993) sostiene que los conceptos geométricos no son reducibles a una definición puramente formal sino que el concepto es una imagen enteramente controlada por una definición y sin este tipo de imágenes espaciales, la geometría no existiría como una rama de las matemáticas. En la resolución presentada por el estudiante A, pareciera que existe una buena fusión entre la definición y la imagen evidenciando una conveniente construcción del concepto figural de poliedro regular.

Los estudiantes, en general, recurren a las imágenes que tienen de poliedro regular y parten de ellas para intentar la construcción de un nuevo poliedro que no cumpla una de las condiciones exigidas por la definición de poliedro regular, en este caso que en cada vértice concurran el mismo número de caras.

Respecto del análisis de la construcción (condiciones necesarias y unicidad)

Se aprecia que los estudiantes no realizan una búsqueda sistemática basada en las propiedades que deben cumplir los ángulos poliedros de las figuras solicitadas. Esto consiste en analizar las posibilidades de que en un vértice concurran tres, cuatro y cinco triángulos equiláteros. Los estudiantes consideran el caso de tres triángulos equiláteros y descartan el de cuatro (dado que en ese caso es siempre regular) pero no tienen en cuenta el de cinco que les permitiría pensar en otra solución: una bipirámide formada por dos pirámides pentagonales.

No logran, en ninguno de los tres grupos, realizar un análisis previo a la construcción acerca de las condiciones que son necesarias para su existencia, lo que se solicita en el punto i) de la consigna.

En referencia al análisis de la unicidad del poliedro que cumpla las condiciones solicitadas, el grupo A y D no lo tiene en cuenta. El grupo T y M lo considera particularmente y construye, empleando el SGD, figuras que cumplen con lo solicitado y consideran otra que no cumple con los solicitado aunque no la construyen. El grupo G y C, una vez obtenida una figura que cumpla la condición pedida, a su criterio, no consideran otra posibilidad.

Respecto a la utilización del software en la elaboración de conjeturas

Se remarca que los estudiantes emplean el software en la construcción del concepto figural de poliedro regular durante el cursado de la materia elaborando conjeturas a partir de su uso realizando pruebas informales mediante las propiedades utilizadas en las construcciones y haciendo uso del desplazamiento de objetos libres para validar o invalidar conjeturas, previo a las demostraciones formales.

En este problema en particular, todos los grupos utilizan un criterio visual para justificar que la figura obtenida tiene las características solicitadas en el problema empleando la herramienta *Rota vista gráfica 3D*. Esto les permite a los alumnos explorar las particularidades de la figura tridimensional construida analizándola desde distintos puntos de vista, por ejemplo, pueden determinar la cantidad de caras que concurren en un vértice, entre otras condiciones.

Con un solo comando pueden construir el tetraedro regular y luego utilizan en un caso simetría central (grupo T y M) y en otro simetría especular (grupo D y A). Esto permitiría validar la construcción utilizando propiedades de una manera muy sencilla, ya que pueden asegurar la igualdad de las caras y que el tetraedro obtenido por estas simetrías es igual al tetraedro dado aunque no se evidencia en los estudiantes participantes que lo hayan realizado. El grupo G y C sin embargo, no utiliza la herramienta *Tetraedro*, lo construyen a partir de herramientas disponibles basadas en la definición de dicho poliedro regular y propiedades geométricas.

Gutiérrez y Jaime (2015) refieren a estudios cuyos resultados expresan que el uso del software permite a través de las construcciones mejorar la capacidad de visualización e intuición no solo centrando la atención en los aspectos visuales sino en las propiedades matemáticas involucradas. Las herramientas que ofrece el software brindan aspectos que favorecen la elaboración de argumentos que justifiquen los procedimientos de resolución lo que superaría inconsistencias entre los criterios utilizados en la resolución y aquellos que son verbalizados dado que al utilizar una herramienta determinada del software queda expuesta la propiedad y concepto involucrados. Podría decirse que la igualdad de los tetraedros que conforman las figuras tridimensionales construidas ("gemelos" por un vértice y bipirámide) es tan evidente para los estudiantes que no consideran la necesidad de justificarla. Como sostiene Sessa et al (2015) es trabajo del docente poner de manifiesto que las construcciones con el SGD requieren de cierta racionalidad matemática que permita validar las conclusiones obtenidas.

El uso del software contribuye a la formación de imágenes dinámicas lo que enriquece la formación del concepto figural. Gutiérrez y Jaime (2015) sostienen que

> La problemática derivada de la pobreza de las imágenes conceptuales es especialmente importante en geometría espacial. En la actualidad, el uso de programas de geometría dinámica 3-dimensional puede ser un complemento a los materiales manipulativos y a las representaciones estáticas en los libros de texto que ayude a los estudiantes a crear imágenes mentales adecuadas. (p. 59)

El uso del software según Gutiérrez y Jaime (2015) empleado de manera sistemática influye positivamente en el desarrollo de una correcta fusión entre la imagen y la definición.

Respecto al uso de no ejemplos de un concepto

El problema apunta a trabajar con no ejemplos de poliedro regular, en este caso, con poliedros que cumplan dos de las condiciones exigidas por su definición. Con esto se espera que los estudiantes valoricen las tres condiciones que deben cumplirse necesariamente para que el poliedro sea regular (caras polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de caras).

Si bien no se pretende generalizar resultados, lo analizado invita a una reflexión acerca del trabajo que se realiza con determinados conceptos geométricos, en este caso particular, el de poliedro regular. Cuando se intenta que el alumno construya un concepto figural sería interesante, además de hacer hincapié en la definición, presentar diversas imágenes del mismo tratando de que estén exentas de posiciones y formas estereotipadas. Como sostiene Guillén Soler (1997) es importante brindar imágenes ricas y desprovistas de posición y perfección al estudiante.

Generalmente no se tienen en cuenta los no ejemplos que corresponden al concepto que se trabaja, lo cual sería enriquecedor para la formación de imágenes (Vinner y Dreyfus, 1989) y les permitiría a los estudiantes ganar experiencias para la construcción de conceptos más abstractos (Tall, 1989). Las experiencias con los no ejemplos pueden influir en la necesidad del estudiante de recurrir a la definición y no quedarse sólo con el aspecto figural para decidir si una imagen es representante o no del concepto que se está desarrollando. El trabajo con no ejemplos brinda un conjunto fructífero de imágenes no estereotipadas con las que el alumno puede contraponer la definición y exige al estudiante recurrir constantemente a la definición contrastando la imagen.

Se considera este aspecto muy importante ya que en general las figuras que proveen los libros de texto son estereotipadas y corresponden solo a ejemplos del concepto. Con respecto al software GeoGebra la herramienta *Tetraedro*, por ejemplo, refiere a la construcción de un tetraedro regular lo que podría limitar a los estudiantes a pensar que un tetraedro siempre es regular. De igual modo ocurre con el resto de los poliedros regulares. El uso de no ejemplos apunta a romper con esta interpretación errónea. Por este motivo el problema propuesto en este artículo se basa en la construcción de un no ejemplo.

La presentación de no ejemplos de esta manera contribuye a reflexionar sobre las condiciones que se expresan en la definición y a pensarla como una condición necesaria y suficiente analizando las restricciones formales del concepto además de enriquecer las imágenes visuales redundando en beneficio de la construcción del concepto figural.

Se pretende poner en evidencia la necesidad de analizar todas las condiciones que debe cumplir una definición. La propuesta presentada, al considerar que existen poliedros que cumplen algunas de las condiciones exigidas por la definición de poliedro regular y no otras, contrapone lo que generalmente se presenta en los libros de texto de nivel superior en los que solo se analiza la existencia de los poliedros regulares.

Las ventajas que propone la utilización de no ejemplos fundamenta la elección de esta propuesta que solicita especialmente construcciones de no ejemplos. Los estudiantes de los grupos G y C y T y M no consideraron relevante el uso de la definición de poliedro regular al comienzo de la resolución del problema. No obstante, la aparición de estos no ejemplos en su componente figural los hace reflexionar sobre la existencia de poliedros que cumplen algunas de las condiciones exigidas por la definición y no otras. Luego de la presentación del trabajo realizado de los tres grupos con el empleo del software, la estudiante C cuestiona la herramienta *Tetraedro* de GeoGebra ya que limita la construcción a un tetraedro regular. Esto da cuenta que el uso de los no ejemplos influye en la formación del concepto figural de poliedro regular dado que permite pensar que existen tetraedros que no son regulares.

El trabajo con software de geometría dinámica y materiales manipulativos, si se presentan tanto ejemplos como no ejemplos sin dejar de lado la definición de los conceptos, podría contribuir positivamente en la formación de conceptos figurales.

Para continuar el trabajo sería interesante efectuar el análisis de lo realizado por estudiantes en otros problemas de la secuencia donde se presentan otros tipos de poliedros, según la categorización realizada en el punto 4.1 de propuesta de trabajo, que también constituyen no ejemplos de poliedro regular. Este estudio podría dar más indicios acerca de la influencia del uso de no ejemplos en la fusión entre las imágenes y definición del concepto de poliedro regular.

REFERENCIAS

Argentina. Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada.* Recuperado de https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf

Argentina. Ministerio de Educación. (2012) *Núcleos de aprendizaje prioritarios Campo de formación general Ciclo Orientado Educación Secundaria*. Recuperado de http://entrama.educacion.gov.ar/uploads/nap/6-Matem%C3%A1tica%20OR%20completa.pdf

Argentina. Ministerio de Educación. (2011) *Núcleos de aprendizaje prioritarios Ciclo Básico Educación Secundaria*. Recuperado de http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL004315.pdf

Fischbein, E. (1993) *The theory of figural concepts.* Revista Educational Studies in Mathematics.24 (2): 139-162.

Grossi, S. y Sgreccia, N. (2016).Perspectivas docentes acerca de habilidades de representación y comunicación de lo tridimensional.En *Libro de actas 2 CIECyM y 3 ENEM* (pp. 73-79). Recuperadode http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Guillén Soler, G. (2000) Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias*, *18*(1), 35-53.

Guillén Soler G. (1997)*El mundo de los poliedros*. Madrid, España: Síntesis.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015) Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, *9*(2), 53-83.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Itzcovich, H. (2007) *La matemática escolar.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Lakatos, I. (1978) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid, España: Alianza Editorial.

McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. 5° edición. Madrid, España: Pearson. Addison Wesley.

Puig Adam, P. (1980) *Curso de geometría métrica. Tomo I. Fundamentos*. Madrid, España: Gómez Puig Ediciones.

Schaefer, L. y Sgreccia, N. (2016). Conocimiento especializado del contenido al enseñar a medir segmentos y ángulos a futuros profesores en matemática. En*Libro de actas 2 CIECyM y 3 ENEM* (pp. 66-72). Recuperado de http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Sessa, C., Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R. Di Rico, E. y Duarte, B. (2015) La actividad docente mediada con TIC. La transformación del trabajo matemático en el aula del secundario a partir de la integración de las computadoras. En A. Pereyra y D. Fridman (Ed.) *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense.* (pp. 137-164) Buenos Aires, Argentina: UNIPE: Editorial Universitaria.

Tall, D. (1989).Concept images, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*,*9*(3), 37–42.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989) Images and definitions for the concept of function.*Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Ana María Mántica

Domicilio postal: Avellaneda 5094. Santa Fe. Argentina. CP: 3000

Teléfono: +54 3424558036