

Un modelo bisectorial de ciclos distributivos endógenos y sobreproducción*

A two-sector model of endogenous
distributive cycles and overproduction

*John Cajas Guijarro***

ABSTRACT

This paper introduces a two-sector model of endogenous distributive cycles and overproduction, by using elements from Marxian and Kaleckian perspectives. The model combines the two-sector model with market power presented by Dutt (1988) with insights from the cyclical model of Goodwin (1967) and the model of growth and distribution of Dutt (1987). The paper establishes the analytical conditions for a short-run equilibrium point for sectoral capacity utilization rates. Furthermore, for the long run, considering capital accumulation, the paper demonstrates the existence of stable cycles in four dimensions (sectoral distribution of capital, employment rate, and markups for sectors producing capital and consumption goods). These findings are used to reinterpret overproduction within capitalist cycles, where the relative magnitudes of overaccumulation of capital and underconsumption change at different phases of the cycle, while full employment is not a relevant case. The paper concludes by suggesting insights for future research.

Keywords: Sectoral capacity utilization; bargaining power; long run cycles; overproduction. *JEL codes:* B51, C62, E32, O41.

* Artículo recibido el 12 de mayo de 2023 y aceptado el 13 de febrero de 2024. El autor agradece los comentarios de evaluadores anónimos que mejoraron notablemente este trabajo. El contenido del artículo es responsabilidad exclusiva del autor.

** John Cajas Guijarro, Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Central del Ecuador (correo electrónico: jcajasg@uce.edu.ec).

RESUMEN

Este artículo expone un modelo bisectorial de ciclos distributivos endógenos y sobreproducción (con elementos marxistas y kaleckianos), al combinar el modelo bisectorial con poder de mercado de Dutt (1988), elementos del modelo de ciclos de Goodwin (1967) y el modelo agregado de crecimiento y distribución de Dutt (1987). El artículo deduce las condiciones analíticas que llevan a un equilibrio de corto plazo de las capacidades instaladas sectoriales. Luego, se demuestra que los componentes del modelo generan ciclos estables de largo plazo (es decir, con base en la acumulación de capital) en cuatro dimensiones (distribución sectorial del capital, tasa de empleo y márgenes de rentabilidad en los sectores productores de bienes de capital y de consumo). Finalmente, se aprovechan estos resultados para reinterpretar el concepto de sobreproducción en un contexto de ciclos capitalistas, donde la sobreacumulación de capital y el subconsumo cambian sus magnitudes relativas en las diferentes fases del ciclo, sin que el pleno empleo sea un caso relevante. Al final, se plantean algunas propuestas para análisis futuros más complejos.

Palabras clave: capacidad instalada sectorial; poder de negociación; ciclos de largo plazo; sobreproducción. *Clasificación JEL:* B51, C62, E32, O41.

INTRODUCCIÓN

Entre las intuiciones planteadas por Karl Marx (2009a, 2009b y 2009c) al discutir las contradicciones del capitalismo y su propensión a crisis recurrentes, suele destacar el concepto de sobreproducción. Si bien no existe una definición estándar, en general la sobreproducción puede entenderse como la producción de una cantidad de mercancías en exceso en comparación con la cantidad que puede venderse a los precios vigentes, es decir, comparada con la demanda efectiva del mercado (McKeown, 1987: 36; Marx, 2009b). Como en Sherman (1967), puede decirse que la sobreproducción es una característica innata de los ciclos capitalistas, y se expresa con cambios en la magnitud relativa de fenómenos como la sobreacumulación de capital y el subconsumo obrero. La sobreacumulación ocurre porque la competencia capitalista presiona a que las empresas individuales acumulen capital y produzcan mercancías a un ritmo mayor que la capacidad para absorberlas de la

demanda efectiva del mercado (Sherman, 1967: 492-496). Esa demanda efectiva limitada tiene como principal causante el subconsumo obrero, es decir, la incapacidad de la clase trabajadora de adquirir toda la producción de medios de consumo, debido a la naturaleza de los salarios en el capitalismo, cuyo crecimiento está restringido por múltiples factores (por ejemplo, presión del ejército laboral de reserva) que buscan garantizar la rentabilidad de la clase capitalista (Sherman, 1967: 489-492).

Pese a que Marx y otros pensadores han formulado varias intuiciones respecto a la sobreproducción, son escasas las interpretaciones matemáticas formales. En respuesta, el presente artículo expone un modelo bisectorial de ciclos distributivos¹ y sobreproducción que toma como base el modelo bisectorial con poder de mercado de Dutt (1988), combinado con elementos del modelo de ciclos de Goodwin (1967) y el modelo agregado de crecimiento y distribución de Dutt (1987). Asimismo, el artículo demuestra analíticamente cómo las complejas interacciones entre los componentes del modelo generan ciclos estables² en cuatro variables endógenas: distribución sectorial del capital, tasa de empleo y márgenes de rentabilidad del sector 1 (productor de medios de producción) y del sector 2 (productor de medios de consumo). Por ende, el texto busca contribuir en el campo de la teorización y la modelización de las estructuras y los ciclos capitalistas desde un enfoque de economía política analítica (Veneziani y Zamparelli, 2017), y sumarse a trabajos previos del autor desde enfoques agregados (Cajas Guijarro, 2023) y sectoriales (Cajas Guijarro, 2022). Estos aportes tienen como principal hipótesis de trabajo que la evolución de la economía capita-

¹ Los ciclos distributivos son ciclos provocados por la pugna entre clases sociales (principalmente trabajadores asalariados y capitalistas) al definir la distribución del ingreso. El trabajo pionero en modelizar matemáticamente estos ciclos es de Goodwin (1967), quien se inspiró en los planteamientos de Marx (2009a) sobre el vínculo entre acumulación capitalista y ejército laboral de reserva. Para una revisión de trabajos teóricos y empíricos sobre ciclos distributivos, véase Barrales-Ruiz et al. (2022), mientras que, para una revisión sobre modelos de ciclos marxistas, véase Cajas Guijarro (2023). Para Bernard, Gevorkyan, Palley y Semmler (2014), los ciclos distributivos de Goodwin (1967) se enfocan en fluctuaciones de mediano plazo asociadas con la participación de salarios y ganancias en el producto, de modo que difieren de los ciclos propuestos por otros pensadores (por ejemplo, Juglar, Kitchin, Schumpeter, Samuelson, Kalecki, Kaldor, Kondratieff).

² Definimos como “ciclos estables” a las dinámicas cíclicas capaces de perdurar indefinidamente en el tiempo, *ceteris paribus*. Esta noción se contrapone a los “ciclos inestables”, los cuales interpretamos como dinámicas cíclicas que no pueden perdurar indefinidamente, pues en algún momento las variables endógenas del modelo toman valores económicamente no factibles (por ejemplo, comportamientos explosivos).

lista puede representarse con sistemas dinámicos no lineales (Strogatz, 2018), donde las crisis se complejizan por múltiples contradicciones. Para el presente artículo, esta hipótesis asume que los ciclos capitalistas están intrínsecamente vinculados con la sobreproducción en un contexto sectorial (por ejemplo, sobreacumulación asociada con el sector 1 y subconsumo vinculado con el sector 2). Así, la sobreproducción puede reinterpretarse como la inviabilidad del pleno empleo de capacidades instaladas sectoriales, y llega al punto en que dicho pleno empleo resulta irrelevante para describir el ciclo capitalista.

El artículo se estructura de la siguiente forma. Luego de esta introducción, la sección I hace una revisión teórica y de literatura referencial. Después, se expone el modelo bisectorial de ciclos distributivos y sobreproducción en tres partes: la sección II describe el esquema inicial del modelo y un primer equilibrio dinámico,³ con base en una exposición análoga a Dutt (1988), donde se asume que salario y precios son constantes; la sección III toma elementos de Goodwin (1967) y Dutt (1987) para ampliar el modelo al explicar las razones por las cuales salario y precios pueden variar, de donde surge un sistema dinámico cuya solución genera ciclos endógenos⁴ en cuatro dimensiones (este resultado se demuestra analíticamente en dos apéndices matemáticos); la sección IV emplea estos resultados para reinterpretar la sobreproducción en un contexto de fluctuación cíclica en el uso de capacidades instaladas sectoriales a largo plazo (es decir, con base en la acumulación de capital).⁵ Finalmente, la sección V concluye y resume propuestas para investigaciones futuras.

³ En un sistema dinámico, el equilibrio es una situación donde las variables endógenas del sistema toman valores constantes que representan un punto de equilibrio dinámico. Alrededor de dicho punto el sistema puede exhibir diferentes comportamientos, como dinámicas monótonas/oscilatorias estables, inestables, entre otras. Para una introducción al estudio de sistemas dinámicos, véase Strogatz (2018).

⁴ Con base en Goldstein (1997: 862), planteamos que los ciclos endógenos son no aleatorios, recurrentes y autogenerados que resultan de la propia estructura de la economía bajo análisis. Así, en este artículo los ciclos endógenos surgen de la interacción conjunta de cuatro variables endógenas (distribución sectorial del capital, tasa de empleo y márgenes de rentabilidad de los sectores 1 y 2), las cuales poseen igual relevancia analítica. Este comportamiento difiere de los ciclos exógenos, que son detonados por una variable que sufre cambios externos y que actúa como principal determinante del ciclo.

⁵ Se adopta la definición de Dutt (1988: 148) del largo plazo como la situación donde cada sector productivo acumula capital hasta que su distribución sectorial se estabiliza. Por su parte, en el corto plazo el *stock* de capital en cada sector es constante y los mercados se vacían por ajustes en el uso de capacidades.

I. REVISIÓN TEÓRICA Y DE LITERATURA

En *El capital*, Marx (2009a, 2009b y 2009c) planteó varias intuiciones respecto a la sobreproducción como el resultado de la interacción de dos fenómenos. Por un lado, la competencia capitalista induce a un progreso técnico sostenido y al crecimiento del producto sólo con fines de lucro, de donde surge la sobreacumulación de capital en diferentes sectores productivos. Por otro lado, el ingreso de la clase trabajadora depende de salarios limitados por la explotación capitalista, lo que genera el subconsumo obrero. En ese sentido, Marx mencionó lo siguiente:

Al desarrollarse la producción capitalista, la escala de la producción se determina en grado cada vez menor por la demanda directa del producto, y en grado cada vez mayor por el volumen del capital del que dispone el capitalista individual, por la tendencia de su capital a valorizarse y la necesidad de que su proceso de producción sea continuo y se extienda. Con ello crece necesariamente en cada ramo particular de producción la masa de productos que se encuentra como mercancías en el mercado o que busca salida. Crece la masa de capital fijada durante más o menos tiempo bajo la forma de capital mercantil. Se acrecienta, pues, el acopio de mercancías [Marx, 2009b: 171-172].

La razón última de todas las crisis reales siempre sigue siendo la pobreza y la restricción del consumo de las masas en contraste con la tendencia de la producción capitalista a desarrollar las fuerzas productivas como si solamente la capacidad absoluta de consumo de la sociedad constituyese su límite [Marx, 2009c: 623].

Marx también planteó argumentos de que la sobreproducción se desenvuelve en medio de los ciclos capitalistas, donde la sobreacumulación y el subconsumo siempre están vigentes, pero modifican su magnitud relativa según las diferentes fases de los ciclos. Por ejemplo, podemos considerar la siguiente cita:

Decir que las crisis provienen de la falta de un consumo en condiciones de pagar, de la carencia de consumidores solventes, es incurrir en una tautología cabal. El sistema capitalista no conoce otros tipos de consumo que los que pueden pagar, exceptuando el consumo subforma *pauperis* [propio de los indigentes] o el del

“pillo”. Que las mercancías sean invendibles significa únicamente que no se han encontrado compradores capaces de pagar por ellas, y por lo tanto consumidores (ya que las mercancías, en última instancia, se compran con vistas al consumo productivo o individual). Pero si se quiere dar a esta tautología una apariencia de fundamentación profunda diciendo que la clase obrera recibe una parte demasiado exigua de su propio producto, y que por ende el mal se remediaría no bien recibiera aquélla una fracción mayor de dicho producto, no bien aumentara su salario, pues, bastará con observar que invariablemente las crisis son preparadas por un periodo en que el salario sube de manera general y la clase obrera tiene *realiter* [realmente] una porción mayor de la parte del producto anual destinada al consumo [Marx, 2009b: 502].

Aquí cabe recordar que Marx veía como protagonista de los ciclos capitalistas al ejército laboral de reserva, es decir, al grupo de personas “explotable y siempre disponible” para la acumulación capitalista, “independientemente de los límites del aumento real experimentado por la población” (Marx, 2009a: 786-787).⁶ Al respecto, puede leerse el siguiente pasaje:

Los movimientos generales del salario están regulados exclusivamente por la expansión y la contracción del ejército industrial de reserva, las cuales se rigen, a su vez, por la alternación de periodos que se opera en el ciclo industrial. Esos movimientos no se determinan, pues, por el movimiento del número absoluto de la población obrera, sino por la proporción variable en que la clase obrera se divide en ejército activo y ejército de reserva, por el aumento y la mengua del volumen relativo de la sobrepoblación, por el grado en que ésta es ora absorbida, ora puesta en libertad [Marx, 2009a: 793].

Este vínculo entre sobreproducción y ciclos —mediado por el ejército laboral de reserva— posee implicaciones sectoriales. Así, en las fases del ciclo cuando la acumulación capitalista se acelera demasiado, la sobreacumulación de capital presiona especialmente al sector productor de medios de producción (sector 1). En cambio, en las fases cuando los salarios caen, se agudiza el subconsumo obrero, lo que afecta sobre todo el sector productor de medios de consumo (sector 2).

⁶ Para más detalles sobre el papel del ejército laboral de reserva en los ciclos, véase Cajas Guijarro (2023).

Precisamente parte de la literatura que discute la sobreproducción adopta una perspectiva bisectorial. Un ejemplo inicial es el análisis de la reproducción capitalista de Luxemburg (2015), para quien la sobreproducción sólo puede evitarse con la expansión capitalista hacia regiones no capitalistas. En oposición, Bauer (1913) propuso un modelo aritmético donde buscó representar cómo una economía capitalista cerrada sí puede crecer sostenidamente sin recurrir a regiones no capitalistas (King, 1986). Más adelante, Bauer (1936) planteó algunas intuiciones en favor del subconsumo que servirían de base para la interpretación formulada por Sweezy (1942: cap. 10) en un apéndice matemático donde propuso dos hipótesis para describir la sobreproducción. Primero, Sweezy asumió que el consumo de trabajadores y capitalistas crece a un ritmo más lento que la inversión; así, al expandirse la producción, una mayor proporción del producto se destina a acumular capital e induce a la expansión del sector 1 —véanse las ecuaciones (2) y (3) del apéndice de Sweezy—. Segundo, él asumió una regla de proporcionalidad constante entre sectores que debe cumplirse para mantener el equilibrio sectorial, de modo que un aumento de la producción del sector 1 debe ser proporcional al crecimiento del sector 2 —véase ecuación (4) del apéndice mencionado—. Para Sweezy, ambas hipótesis generan una contradicción, pues el subconsumo induce a que la producción se use cada vez más para la inversión, pero esa dinámica trastoca la proporcionalidad entre sectores necesaria para mantener el equilibrio sectorial. Esta interpretación recibió críticas. Por ejemplo, Georgescu-Roegen (1960) criticó el argumento de Sweezy y los esquemas de Marx por problemas de “homogeneidad dimensional”. Otra crítica a Sweezy (no analítica) puede encontrarse en Shaikh (1978), para quien no se justifica el supuesto de que la expansión de los sectores 1 y 2 mantenga una proporcionalidad constante.

Aportes adicionales a la discusión de la sobreproducción incluyen a Bronfenbrenner (1966), quien combinó en un modelo sectorial la sobreproducción con la tendencia a la caída de la tasa de ganancia, y así obtuvo un “dilema” entre crisis por “liquidación” y por “realización”. Por su parte, Sherman (1971) estudió la sobreproducción desde los esquemas de Marx y un enfoque de ciclos mediante ecuaciones en diferencias, donde notó la posibilidad de que un amplio desempleo cíclico ralente el crecimiento económico (aunque sin incluir elementos relevantes asociados con el ejército laboral de reserva y los salarios).⁷ Más recientemente, Sardoni (2015) usó un

⁷Para una interpretación cíclica conceptual de la sobreproducción, véase Sherman (1967).

modelo de dos sectores para plantear que la sobreproducción sería temporal y, por lo tanto, el enfoque de Marx no explicaría las crisis capitalistas de larga duración. En respuesta, Basu (2016) refutó a Sardoni y usó los esquemas marxistas para plantear una crítica a los enfoques centrados sólo en el subconsumo.

En medio de esta literatura, el presente artículo busca aportar con un modelo bisectorial de ciclos distributivos que combine las intuiciones de Marx respecto a la sobreacumulación y el subconsumo dentro del ciclo capitalista. Para ello, a continuación se junta el modelo bisectorial con poder de mercado de Dutt (1988) con elementos del modelo de ciclos de Goodwin (1967) y el modelo agregado de crecimiento y distribución de Dutt (1987), así se identifica la existencia de ciclos en cuatro variables: distribución sectorial del capital, tasa de empleo, y márgenes de rentabilidad de los sectores 1 y 2. Este resultado permite reinterpretar la sobreproducción en las diferentes fases del ciclo y brinda bases para interpretaciones futuras más complejas enfocadas en el desequilibrio sectorial.

II. ESQUEMA INICIAL DEL MODELO Y EQUILIBRIO CON SALARIO Y PRECIOS CONSTANTES

El esquema inicial del modelo asume que el salario nominal y los precios son constantes, con base en una exposición análoga al modelo bisectorial con poder de mercado de Dutt (1988), el cual sirve como punto de partida (con diferente notación), pues permite representar la reproducción capitalista en un contexto donde los sectores no usan plenamente sus capacidades instaladas, aspecto útil para reinterpretar la sobreproducción. Así, como en Dutt (1988), se adoptan los siguientes supuestos iniciales. *S1*: la economía se divide en el sector $i=1$, que produce medios de producción durables (bienes de capital fijo) y el sector $i=2$ que produce bienes de consumo (no existen bienes intermedios). *S2*: la fuerza de trabajo y el capital fijo son los únicos insumos empleados en la producción. *S3*: el capital fijo no se deprecia. *S4*: todos los sectores siguen funciones de producción de coeficientes fijos. *S5*: las empresas mantienen su *stock* de capital fijo una vez que lo instalan (pueden sostener excesos de capital en el tiempo); en cambio, no existen contrataciones de trabajadores a largo plazo, sino que son recontractados en cada periodo productivo. *S6*: existen dos clases sociales, trabajadores que sólo reciben

salarios (se asume libre movilidad laboral, de modo que todos los obreros reciben igual salario), y capitalistas cuyo ingreso proviene de las ganancias generadas por sus empresas. *S7*: los trabajadores no ahorran, mientras que los capitalistas ahorran una fracción s de su ingreso ($0 < s \leq 1$). *S8*: los salarios se pagan luego de la producción, así el fondo salarial no es parte del capital inicial empleado para calcular las tasas de ganancia. *S9*: en cada sector i las empresas siguen una regla de formación de precios, donde a los costos unitarios se agrega un margen (*markup*) (Kalecki, 1971), como sugiere (1):

$$p_i = (1 + z_i)(w/q_i) \quad (1)$$

Donde p_i es el precio del producto creado en el sector i ; w es el salario nominal por hora trabajada; z_i es el margen aplicado sobre los costos por las empresas del sector i ($0 < z_i < 1$), y q_i es la productividad laboral equivalente a:

$$q_i = Q_i/L_i \quad (2)$$

Donde Q_i y L_i representan, respectivamente, la producción y las horas de trabajo empleadas en el sector i .

S10: el salario nominal w , los márgenes z_i y, por ende, los precios p_i son constantes. *S11*: las empresas de cada sector i definen la tasa de crecimiento de su capital fijo g_i según la siguiente función de inversión:

$$g_i = \alpha_i + \beta_i r_i + \tau_i u_i \quad (3)$$

Donde α_i representa el comportamiento autónomo de la inversión (“espíritu animal”); β_i equivale a la motivación de los capitalistas a invertir como respuesta a una determinada tasa de ganancia sectorial r_i (efecto rentabilidad), y τ_i es la motivación a invertir como respuesta a un determinado uso de capacidad instalada sectorial u_i (efecto demanda) (Dutt, 1988: 147). Aquí la tasa de uso de capacidad instalada sectorial u_i se define como:

$$u_i = Q_i/K_i \quad (4)$$

Donde K_i es el *stock* de capital fijo instalado en todas las empresas del sector i . A su vez, definamos a σ_i como la tasa de uso de capacidad instalada de pleno empleo, es decir:

$$\sigma_i = Q_i^M / K_i \quad (5)$$

Donde Q_i^M es la producción sectorial máxima alcanzable cuando existe pleno uso de capacidades instaladas.⁸ *S12*: el uso de capacidad instalada siempre es menor a la situación de pleno empleo, es decir $u_i < \sigma_i$. Desde estos supuestos, la distribución del ingreso generado por la producción de cada sector puede representarse como:

$$p_i Q_i = w L_i + r_i p_1 K_i \quad (6)$$

Donde notamos que los bienes de capital siempre tienen un precio p_1 . A su vez, definamos el exceso de demanda real de bienes de capital ED_1 como la diferencia entre la demanda de inversión enfocada a acrecentar el capital de todos los sectores y la producción del sector 1:

$$ED_1 = g_1 K_1 + g_2 K_2 - Q_1 \quad (7)$$

Asimismo, definamos al exceso de demanda real de bienes de consumo ED_2 como la diferencia entre el gasto real de consumo obrero y capitalista y la producción del sector 2:

$$ED_2 = (w/p_2)(L_1 + L_2) + (p_1/p_2)(1-s)(r_1 K_1 + r_2 K_2) - Q_2 \quad (8)$$

Donde w/p_2 es el salario real, y p_1/p_2 es el precio relativo del bien de capital respecto al bien de consumo. También definamos la distribución sectorial del capital como:

$$k = K_1 / K_2 \quad (9)$$

Este esquema inicial permite obtener algunas deducciones relevantes. Por ejemplo, desde (1) puede deducirse el salario real y el precio relativo:

$$w/p_2 = q_2 / (1 + z_2) \quad (10)$$

$$p_1/p_2 = (q_2/q_1)[(1 + z_1)/(1 + z_2)] \quad (11)$$

⁸ El término σ_i es igual al inverso del parámetro a_{2i} del modelo de Dutt (1988: 147).

La expresión (10) sugiere que el salario real w/p_2 está vinculado con el margen z_2 y la productividad q_2 . Para Dutt (1988: 147-148 y nota 3), con base en Kalecki (1971), el vínculo entre salario real y márgenes está mediado por el “grado de monopolio” vigente en el sector 2 y por el “estado de la lucha de clases” que influye sobre la dinámica salarial. Por su parte, al combinar (1), (2), (4) y (6), pueden deducirse las tasas de ganancia sectoriales en términos del uso de capacidades instaladas:

$$r_1 = (z_1 u_1) / (1 + z_1) \quad (12)$$

$$r_2 = (z_2 q_1 u_2) / [(1 + z_1) q_2] \quad (13)$$

Con base en Dutt (1988: 148), definamos el corto plazo como una situación donde los *stocks* de capital K_i son constantes y los mercados se vacían mientras ajustan las cantidades producidas según la reacción de las empresas a los excesos de demanda. Instrumentamos esta idea con el siguiente supuesto. *S13*: el uso de capacidad instalada sectorial crece cuando en el respectivo mercado existe un exceso de demanda positivo, como sugiere la siguiente ecuación diferencial:

$$u'_i = f_i(ED_i/K_i) \quad (14)$$

donde, para toda variable x , $x' = dx/dt$ es su derivada temporal, $\hat{x} = x'/x$ es su tasa de variación, y la variable se “estabiliza” (se vuelve constante) cuando $\hat{x} = x' = 0$. Así, en (14) el término $f_i > 0$ es la tendencia al crecimiento del uso de capacidad instalada ($u'_i > 0$) cuando el exceso de demanda expresada como proporción del *stock* de capital fijo es positivo ($ED_i/K_i > 0$). Al combinar (14) con (2), (3), (4) y (7) a (13), surge un sistema dinámico de dos ecuaciones diferenciales⁹ que describe la dinámica de corto plazo del uso de capacidades instaladas sectoriales:¹⁰

$$u'_1 = f_1[(\alpha_1 + \alpha_2/k) - (1 - \delta_1)u_1 + (\delta_2 u_2)/k] \quad (15)$$

$$u'_2 = f_2\{(q_2/q_1)[k/(1 + z_2)][1 + (1 - s)z_1]u_1 - [sz_2/(1 + z_2)]u_2\} \quad (16)$$

⁹ Las deducciones y las simulaciones presentadas en este artículo se detallan en un cuaderno de *Matemática*, disponible en: <https://notebookarchive.org/2024-02-6yy60je>

¹⁰ Las expresiones (15) y (16) son análogas a la expresión (32) de Dutt (1988: 149).

donde:

$$\delta_1 = (\beta_1 z_1) / (1 + z_1) + \tau_1 \quad (17)$$

$$\delta_2 = (\beta_2 z_2 q_1) / [(1 + z_1) q_2] + \tau_2 \quad (18)$$

A su vez, definamos el equilibrio de corto plazo como la ausencia de exceso de demanda para todos los mercados de bienes:

$$ED_i = 0 \rightarrow z'_i = 0 \quad (19)$$

Esta definición equivale a la estabilización del uso de capacidades ($u'_i = 0$, $i = 1, 2$), lo que sucede en el punto de equilibrio de corto plazo (u_1^{CP} , u_2^{CP}):

$$u_1^{CP} = [s(1 + z_1)(k\alpha_1 + \alpha_2)] / k\Omega \quad (20)$$

$$u_2^{CP} = (k\alpha_1 + \alpha_2)[1 + (1 - s)z_1](q_2/q_1)[(1 + z_1)/z_2](1/\Omega) \quad (21)$$

donde:

$$\Omega = s[(1 - \tau_1)(1 + z_1) - \beta_1 z_1] - [1 + (1 - s)z_1][\beta_2 + \tau_2(q_2/q_1)((1 + z_1)/z_2)] \quad (22)$$

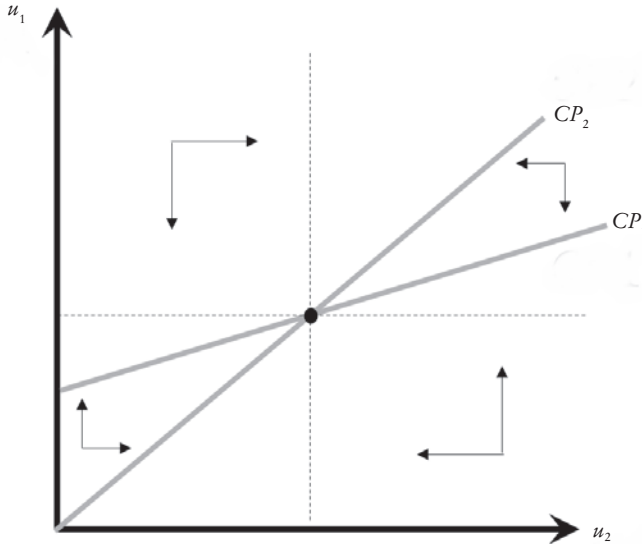
La matriz jacobiana del sistema (15) y (16) evaluada en (u_1^{CP} , u_2^{CP}) muestra los siguientes valores para su traza T^{CP} y determinante Δ^{CP} :

$$T^{CP} = -[f_1(1 - (\beta_1 z_1)/(1 + z_1) - \tau_1) + f_2(s z_2/(1 + z_2))] \quad (23)$$

$$\Delta^{CP} = (f_1 f_2 z_2 \Omega) / (1 + z_1)(1 + z_2) \quad (24)$$

Aquí incluyamos un nuevo supuesto. *S14*: los parámetros β_i y τ_i de la función descrita en (3) son lo suficientemente bajos para cumplir con $\Omega > 0$, lo que garantiza un equilibrio de corto plazo positivo ($u_1^{CP} > 0$, $u_2^{CP} > 0$) y localmente estable (traza negativa $T^{CP} < 0$ y determinante positivo $\Delta^{CP} > 0$) (Strogatz, 2018).¹¹ Este equilibrio se ilustra en la gráfica 1, donde las rectas *CP1* y *CP2* indican respectivamente los valores de (15) y (16) cuando el uso

¹¹ El supuesto *S14* equivale al supuesto C.5 de Dutt (1988: 149-150).

GRÁFICA 1. *Equilibrio de corto plazo con salario y precios constantes*

FUENTE: elaboración propia a partir del modelo de Dutt (1988).

de capacidades instaladas de los sectores 1 y 2 es constante ($u'_1=0$, $u'_2=0$). Por su parte, las flechas indican la dinámica de las soluciones para cualquier valor inicial, e ilustran la estabilidad del equilibrio que ocurre en el corte entre CP_1 y CP_2 .

Con la estabilidad local del equilibrio de corto plazo, también puede decirse que las tasas de ganancia sectoriales vigentes en ese equilibrio son estables, las cuales se deducen al remplazar (20) y (21) en (12) y (13):

$$r_1^{CP} = [sz_1(k\alpha_1 + \alpha_2)]/k\Omega \quad (25)$$

$$r_2^{CP} = [(1 + (1-s)z_1)(k\alpha_1 + \alpha_2)]/\Omega \quad (26)$$

Donde $S14$ garantiza que $r_i^{CP} > 0$. Para Dutt (1988: 150), a diferencia del corto plazo, el largo plazo es una situación donde la inversión hace que los *stocks* de capital K_i y su distribución sectorial k cambien con el tiempo (como resultado de la acumulación capitalista), lo que puede representarse aplicando derivadas temporales en (9), y se obtiene:

$$\hat{k} = k'/k = g_1 - g_2 \quad (27)$$

Donde recordemos que g_i es la tasa de crecimiento de K_i , es decir, $g_i = k'_i/k_i$. Si asumimos que ya se alcanzó el equilibrio de corto plazo ($ED_i = 0$), entonces, si se combina (27) con (3), (20), (21), (25) y (26), puede reescribirse \hat{k} y obtenerse la siguiente ecuación diferencial:

$$\hat{k} = k'/k = (\alpha_1 - \alpha_2) - [(k\alpha_1 + \alpha_2)/\Omega](\gamma_2 - (s\gamma_1)/k) \quad (28)$$

donde

$$\gamma_1 = \beta_1 z_1 + \tau_1(1 + z_1) \quad (29)$$

$$\gamma_2 = [1 + (1-s)z_1][\beta_2 + \tau_2(q_2/q_1)((1 + z_1)/z_2)] \quad (30)$$

Aquí existe un equilibrio de largo plazo k^{LP} cuando $\hat{k} = k' = 0$, es decir, cuando los *stocks* de capital sectoriales crecen a igual ritmo y estabilizan la distribución sectorial del capital:

$$g_1 = g_2 \rightarrow \hat{k} = k' = 0 \quad (31)$$

Al remplazar (31) en (28) y reordenar términos, surge la siguiente expresión cuadrática:

$$\alpha_1 \gamma_2 (k^{LP})^2 + [\alpha_2 \gamma_2 - s\alpha_1 \gamma_1 - \Omega(\alpha_1 - \alpha_2)] k^{LP} - s\alpha_2 \gamma_1 = 0 \quad (32)$$

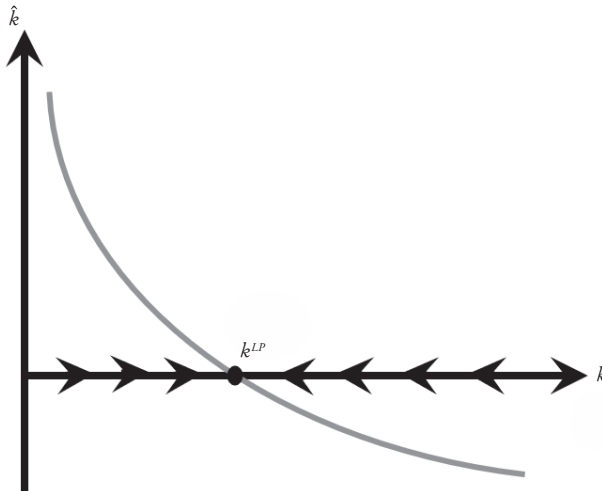
donde $k^{LP} > 0$, pues $[\alpha_2 \gamma_2 - s\alpha_1 \gamma_1 - \Omega(\alpha_1 - \alpha_2)]^2 + 4s\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 > 0$. A su vez, al derivar (28) respecto a k se obtiene:

$$\partial \hat{k} / \partial k = -(a_1 \gamma_2 k^2 + s a_2 \gamma_1) / k^2 \Omega \quad (33)$$

Puede verificarse que esta derivada es negativa ($\partial \hat{k} / \partial k < 0$) para todo k si se cumple *S14*, lo que implica que el equilibrio k^{LP} obtenido como raíz positiva de (32) es estable (Dutt, 1988: 150; Strogatz, 2018). Esta estabilidad se ilustra en la gráfica 2, donde las flechas sugieren que a largo plazo la variable k se estabiliza en k^{LP} .¹²

¹² Para un ejemplo similar de estabilidad sectorial, véase Cajas Guijarro (2022).

GRÁFICA 2. *Equilibrio de largo plazo con salario y precios constantes*



FUENTE: elaboración propia a partir del modelo de Dutt (1988).

Al revisar (32) y (33), se nota que k^{LP} y la dinámica de las trayectorias alrededor de este punto (representada en $\partial \hat{k} / \partial k$) dependen de los márgenes z_i contenidos en Ω , γ_1 y γ_2 . Por ende, si abandonamos el supuesto de salario y precios constantes (y se permite que los márgenes fluctúen), es claro que la dinámica del modelo se complejiza.

III. EQUILIBRIO Y CICLOS DE LARGO PLAZO CON SALARIO Y PRECIOS VARIABLES

El supuesto *S10* de que el salario nominal y los precios son constantes omite el papel de la pugna distributiva y del poder de mercado en los ciclos capitalistas y su impacto sectorial al interpretar la sobreproducción. Por ende, ahora se abandona este supuesto al combinar el modelo de la sección II con el efecto de la pugna distributiva sobre el salario y los precios. Es decir, se combina la dinámica de la acumulación capitalista sectorial —largo plazo en el sentido de Dutt (1988)— con los efectos de la lucha entre clases sociales que buscan apropiarse de una mayor fracción del producto social con incrementos del salario o los precios. A su vez, esta pugna distributiva entre

capitalistas y trabajadores se procesa en el poder de mercado por la influencia que el salario y los precios tienen sobre los márgenes de ganancia.

Para lograr esta combinación, definimos a la tasa de empleo agregada l como:

$$l = (L_1 + L_2) / N \quad (34)$$

Donde $L_1 + L_2$ es la fuerza de trabajo empleada en todos los sectores y N es toda la fuerza de trabajo disponible en el mercado laboral. Al combinar (34) con (2), (4) y (9) se obtiene:

$$l = K_2 / N [u_1 k / q_1 + u_2 / q_2] \quad (35)$$

Si se asume que la economía ya alcanzó un equilibrio de corto plazo sin excesos de demanda, entonces pueden remplazarse (20) y (21) en (35) para deducir la tasa de empleo de dicho equilibrio:¹³

$$l = (K_2 / N) [(k\alpha_1 + \alpha_2) / q_1 \Omega] [(1 + z_1) / z_2] [1 + (1 - s)z_1 + sz_2] \quad (36)$$

Donde Ω depende de los márgenes z_i , como indica (22). Al derivar (36) respecto al tiempo y reorganizar términos se obtiene:

$$l' / l = g_2 - n + [(k_1 k') / (k\alpha_1 + \alpha_2)] - \theta_1 - \Omega' / \Omega + [z_1' / (1 + z_1)] - z_2' / z_2 + [(1 - s)z_1' + sz_2'] / [1 + (1 - s)z_1 + sz_2] \quad (37)$$

Donde, recordemos, g_i es igual a:

$$g_i = K_i' / K_i \quad (38)$$

Mientras que n y θ_i son las tasas de crecimiento de la fuerza de trabajo disponible y de la productividad del trabajo, definidas respectivamente como:

$$N' / N = n \quad (39)$$

$$q_i' / q_i = \theta_i \quad (40)$$

¹³ Por simplicidad se omite el superíndice CP .

Para facilitar la argumentación, incluimos el siguiente supuesto. *S15*: las tasas n y θ_i son constantes.¹⁴ Por su parte, g_2 se obtiene al combinar (3), (21) y (26):

$$g_2 = a_2 + \frac{[(k\tau\omega\alpha_1 + \alpha_2)(1 + (1-s)z_1) + (\beta_2 z_2 q_1 + \tau_2 q_2(1 + z_1))]}{q_1 z_2 \Omega} \quad (41)$$

A la vez que Ω'/Ω resulta de derivar (22) respecto al tiempo, así se obtiene una función que depende de los márgenes y sus derivadas, los crecimientos de las productividades y la productividad relativa del sector 2 respecto al sector 1.¹⁵ Esta función puede escribirse genéricamente como:

$$\Omega'/\Omega = \Omega'/\Omega(z_1, z_2, z_1', z_2', \theta_1, \theta_2, q_{21}) \quad (42)$$

donde:

$$q_{21} = q_2/q_1 \quad (43)$$

Por su parte, la expresión (37) —y sus componentes— plantea que el crecimiento de la tasa de empleo l está vinculado con la dinámica de k y z_i . Por ende, si estas variables fluctúan a largo plazo por la acumulación capitalista, igualmente lo hará l . Pero si la tasa de empleo se mueve, también cambia la proporción del ejército laboral de reserva,¹⁶ lo que afecta el poder obrero de negociación salarial si se admite la intuición de Marx de que el ejército de reserva actúa como regulador salarial (véase la sección I). Esta intuición puede representarse con el siguiente supuesto propuesto originalmente por Goodwin (1967: 55)¹⁷ y ampliado por Cajas Guijarro y Vera (2022: 570).¹⁸

¹⁴ En versiones más complejas del modelo podría asumirse que el crecimiento de la productividad es endógeno al uso de capacidades instaladas (efecto demanda) (Dávila-Fernández y Sordi, 2019: ecuación 10), mientras que el crecimiento de la fuerza de trabajo disponible es endógeno a la acumulación capitalista (Harris, 1983: ecuación 8).

¹⁵ La forma completa de (42) está disponible en el cuaderno de *Mathematica*, disponible en: <https://notebookarchive.org/2024-02-6yy60je>

¹⁶ Se asume que la reserva laboral sólo incluye desempleados (no existe subempleo).

¹⁷ Goodwin (1967) plantea un modelo agregado que genera ciclos endógenos entre la tasa de empleo y la participación salarial al utilizar una curva de Phillips de salario real.

¹⁸ Cajas Guijarro y Vera (2022) proponen un modelo de ciclos endógenos en tres dimensiones donde, desde varias intuiciones de Marx, se analiza la posibilidad de que el ejército laboral de reserva no sólo regule los salarios, sino también la intensidad del trabajo (y, por ende, la productividad).

S16: el poder de negociación obrero al disputar con los capitalistas el salario real puede representarse con la siguiente ecuación diferencial:¹⁹

$$w'/w - p_2'/p_2 = -\phi + \rho l - \mu(p_2'/p_2) \quad (44)$$

Donde $w'/w - p_2'/p_2$ es la tasa de variación del salario real (diferencia entre la tasa de variación del salario nominal y del precio del bien de consumo), mientras que $\phi, \rho, \mu > 0$ representan la distribución de poder entre trabajadores y capitalistas al negociar el crecimiento salarial: mientras más grande sea ρ o más pequeños sean ϕ y μ , existe mayor poder obrero para empujar el salario real al alza y viceversa. En particular, ρl recoge el efecto del ejército laboral de reserva, pues mientras mayor tasa de empleo l haya, habrá menor ejército laboral y mayores poder de negociación obrero y empuje al crecimiento salarial. En cambio, $\mu(p_2'/p_2)$ sugiere que en la negociación pueden existir fallas de indización de modo que la inflación termina afectando negativamente los salarios reales; así, $\mu > 0$ puede interpretarse como el poder capitalista de reducir el crecimiento efectivo del salario real por debajo del objetivo inicial de los trabajadores (Cajas Guijarro y Vera, 2022: 571). Por ende, el término μ acentúa el subconsumo obrero al reducir el crecimiento del salario real ante un crecimiento de precios.

Al moverse el salario por cambios en la tasa de empleo, surge una presión sobre los márgenes z_i . En concreto, al derivar (1) respecto al tiempo y reorganizar términos, se obtiene:

$$z_i'/(1 + z_i) = \theta_i - (w'/w - p_i'/p_i) \quad (45)$$

La expresión (45) sugiere que z_i tiende a caer cuando w crece. Si θ_i es constante, el único mecanismo que tienen las empresas del sector i para controlar su margen ante cambios salariales es ajustando el precio p_i . Este comportamiento puede representarse al incluir un supuesto inspirado en el modelo agregado de crecimiento y distribución de Dutt (1987).²⁰ *S17*: las empresas modifican p_i cuando el margen z_i vigente en el mercado difiere de su margen objetivo ζ_i , comportamiento representado por:

¹⁹ La expresión (44) es idéntica a la ecuación (22) planteada por Cajas Guijarro y Vera (2022: 570).

²⁰ Dutt (1987) expone un modelo agregado que es un preámbulo a su modelo bisectorial discutido en la sección III. Sobre todo, la ecuación (13) de Dutt (1987: 79) es análoga a la expresión (46) de este artículo.

$$p_i'/p_i = \lambda_i(\zeta_i - z_i) \quad (46)$$

Donde $0 < \zeta_i < 1$. Al remplazar (44) y (46) en (45) puede expresarse la dinámica de z_i en función de l :

$$z_1'/(1 + z_1) = \theta_1 + \phi - \rho l + \lambda_1(\zeta_1 - z_1) - \lambda_2(1 - \mu)(\zeta_2 - z_2) \quad (47)$$

$$z_2'/(1 + z_2) = \theta_2 + \phi - \rho l + \lambda_2\mu(\zeta_2 - z_2) \quad (48)$$

Los movimientos de z_i representados en (47) y (48) afectan la dinámica de k , como ilustra (28). Finalmente, las afectaciones en z_i y k se trasladan al crecimiento de la tasa de empleo l planteado en (37), lo que resulta en una compleja retroalimentación no observable en el modelo original de Dutt (1988) por el supuesto de salario nominal y precios constantes. Esta retroalimentación se resume al combinar las expresiones (22), (28), (29), (30), (37), (41), (42), (43), (47) y (48) en un sistema dinámico de cuatro ecuaciones diferenciales cuyas variables endógenas son k , l , z_1 y z_2 , y que puede escribirse genéricamente como:

$$\begin{aligned} k' &= k'(k, l, z_1, z_2), \quad l' = l'(k, l, z_1, z_2), \\ z_1' &= z_1'(k, l, z_1, z_2), \quad z_2' = z_2'(k, l, z_1, z_2) \end{aligned} \quad (49)$$

Debido a la fuerte complejidad de (49), para estudiar sus propiedades consideremos un caso simplificado con los siguientes supuestos. *S18*: el ahorro total es consecuencia endógena de la inversión, la cual puede desenvolverse gracias a las finanzas y el crédito; así, asumimos que los capitalistas ahorran todas sus ganancias ($s = 1$) sin afectar directamente la inversión, pues lo hacen indirectamente a través del consumo.²¹ *S19*: la dinámica autónoma

²¹ Siguiendo a Stockhammer (2018: 11-12), asumimos que las finanzas y el crédito permiten que la inversión se desenvuelva sin estar restringida por el ahorro. Así, la inversión posee una dinámica propia (dependiente del "espíritu animal", la rentabilidad y la demanda, véase la ecuación [3]), la cual, a través de un proceso multiplicador, expande el ingreso total, las ganancias y, por ende, el ahorro. Como consecuencia, los capitalistas pueden definir la proporción de ganancias destinadas al ahorro sin afectar directamente la inversión (más bien afectan el consumo, la demanda agregada, el uso de capacidad instalada y, de ahí, la inversión). Respecto al sector financiero, asumimos implícitamente que siempre facilita

de la inversión es idéntica entre sectores ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$). S20: la inversión no reacciona al uso de capacidad instalada ($\tau_1 = \tau_2 = 0$).²² S21: las empresas del sector 1 poseen márgenes endógenos y precios constantes ($\lambda_1 = 0$), mientras que las empresas del sector 2 ajustan precios y márgenes ($\lambda_2 > 0$).²³ S22: en todos los sectores la productividad crece a un mismo ritmo ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$). S23: la fuerza de trabajo disponible es constante ($n = 0$). S24: se normaliza el efecto de la rentabilidad en la función de inversión del sector 1 ($\beta_1 = 1$), mientras que en la función de inversión del sector 2 se asume que este efecto es más bajo ($\beta_2 < 1$).²⁴ En estos supuestos, el sistema dinámico (49) toma la siguiente forma concreta:

$$k'/(1+k) = \alpha(\beta_1 z_1 - \beta_2 k)/(1 - \beta_2) \quad (50)$$

$$l'/l = [\alpha(1+z_1)/(1-\beta_2)] + [(\rho l(1-z_2) - (\theta + \phi + \lambda_2 \zeta_2 \mu))/z_2] - \lambda_2[\mu + \zeta_2(\mu - 1)] - \lambda_2 z_2(\mu - 1) + \phi \quad (51)$$

$$z_1'/(1+z_1) = \theta + \phi - \rho l + \lambda_2(\mu - 1)(\zeta_2 - z_2) \quad (52)$$

$$z_2'/(1+z_2) = \theta + \phi - \rho l + \lambda_2 \mu(\zeta_2 - z_2) \quad (53)$$

Aquí puede redefinirse el equilibrio de largo plazo como una situación donde las variables endógenas del sistema (50) a (53) (distribución sectorial del capital k , tasa de empleo l , margen de rentabilidad del sector 1 z_1 , margen de rentabilidad del sector 2 z_2) toman valores constantes y, por ende, sus derivadas temporales se anulan ($k' = l' = z_1' = z_2' = 0$). Así, surge un punto de equilibrio dinámico de largo plazo (k^{LP} , l^{LP} , z_1^{LP} , z_2^{LP}) definido por:

$$k^{LP} = [\theta(1-\beta_2) - \alpha]/\alpha\beta_2 \quad (54)$$

$$l^{LP} = (\theta + \phi)/\rho \quad (55)$$

el dinero necesario para evitar problemas de liquidez, a la vez que participa de parte de las ganancias capitalistas e igualmente las destina totalmente al ahorro. Para un análisis sobre este supuesto aplicado al sector financiero, véase Trigg (2006: 53).

²² Este supuesto provoca que las funciones planteadas en (3) sólo incluyan el efecto de la rentabilidad, lo que se aproxima al enfoque de Robinson (1956 y 1962).

²³ Este supuesto busca enfatizar en la dinámica del sector 2 que produce bienes de consumo, pues el precio de estos bienes entra directamente en la disputa por el salario real.

²⁴ Este supuesto representa de forma simplificada la intuición de que el sector 1 hace crecer su capital con mayor fuerza que el sector 2 debido a la sobreacumulación de capital.

$$z_1^{LP} = [\theta(1 - \beta_2) - \alpha] / \alpha \quad (56)$$

$$z_2^{LP} = \zeta_2 \quad (57)$$

Éste posee valores positivos cuando $\beta_2 < 1$, y $\alpha < \theta(1 - \beta_2)$. Puede demostrarse analíticamente (véanse los apéndices 1 y 2) que, en la cercanía de este punto de equilibrio de largo plazo, las interacciones entre los componentes del sistema dinámico (50) a (53) generan un comportamiento cíclico estable en las variables endógenas si λ_2 es lo suficientemente alto y, sobre todo, si μ se aproxima (por la derecha) al valor crítico μ^{HB} dado por:

$$\mu \rightarrow \mu^{HB} = \frac{\theta[\theta(1 - \zeta_2) + \lambda_2(1 - \zeta_2)] + \phi(1 - \zeta_2)[\theta + \lambda_2(1 + \zeta_2)]}{\lambda_2\zeta_2(1 + \zeta_2)[\theta + \lambda_2(1 + \zeta_2)]} \quad (58)$$

Para visualizar el comportamiento cíclico del sistema simplificado en (50) a (53) pueden emplearse simulaciones numéricas, lo que requiere definir parámetros y valores iniciales. Por ejemplo, consideremos los valores del cuadro 1 donde ρ y ϕ (asociados al crecimiento salarial), θ (crecimiento de la productividad laboral) y β_2 (reacción de la acumulación del sector 2 a la rentabilidad) se inspiran en las estimaciones empíricas del modelo de Goodwin (1967) realizadas por Grasselli y Maheshwari (2018) para Francia entre 1960 y 2010;²⁵ por su parte, los parámetros α , λ_2 , ζ_2 y μ , y los valores iniciales k_0 , l_0 , z_{10} y z_{20} se calibran para generar resultados económicamente relevantes (por ejemplo, tasa de empleo fluctuante entre 0 y 1). Aquí caben dos aclaraciones. Primero, al aplicar los valores del cuadro 1 en (58) se obtiene un valor crítico $\mu^{HB} = 2.1085$, es decir, mientras más se aproxime μ a 2.1085 por la derecha, más marcada será la existencia de un comportamiento cíclico estable, sin olvidar que la aproximación no es perfecta, pues la naturaleza no lineal del modelo puede generar dinámicas inestables antes de llegar al valor crítico (véanse los apéndices 1 y 2). Segundo, el propósito de los valores del cuadro 1 no es ajustarse a una economía concreta, sino ilustrar el resultado

²⁵ Grasselli y Maheshwari (2018) evalúan empíricamente el modelo de Goodwin (1967) para un panel de 10 países capitalistas desarrollados entre 1960 y 2010 mediante un análisis de cointegración.

CUADRO 1. *Parámetros y valores iniciales para la simulación 1 (modelo simplificado)*

<i>Parámetro</i>	ρ	ϕ	θ	β_2	α	λ_2	ζ_2	q_{21}	μ	k_0	l_0	z_{10}	z_{20}
<i>Valor</i>	0.549	0.491	0.022	0.792	0.004	2	0.1	0.5	2.1096	0.182	0.915	0.1	0.104

FUENTE: elaboración propia a partir de las estimaciones de Grasselli y Maheshwari (2018) para Francia.

teórico analítico demostrado en los apéndices 1 y 2, así como brindar una idea de valores referenciales para investigaciones futuras.²⁶

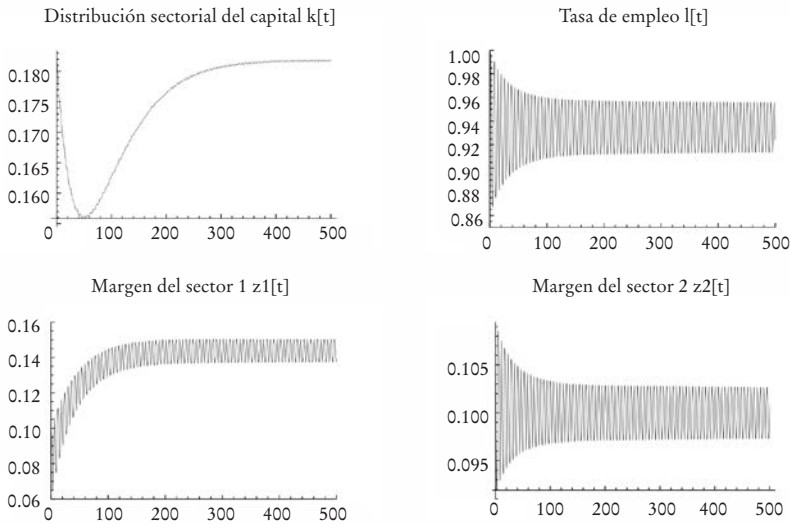
Con base en estas observaciones, los valores del cuadro 1 permiten simular series temporales de las cuatro variables endógenas del modelo simplificado (k , l , z_1 y z_2), lo que resulta en comportamientos cíclicos que fluctúan alrededor de valores de equilibrio (simulación 1), como ilustra la gráfica 3 (aunque para k los ciclos muestran baja amplitud).²⁷ Por su parte, las trayectorias simuladas en dos y tres dimensiones (gráficas 4 y 5) sugieren que el modelo genera dinámicas complejas, aunque al pasar el tiempo surgen ciclos estables con movimiento en sentido horario en los planos formados por las variables $z_1 - l$, $z_2 - l$ y $z_1 - z_2$, mientras que k se estabiliza. A su vez, los valores del cuadro 1 y las simulaciones de k , l , z_1 y z_2 pueden remplazarse en (20), (21) y (22) para simular la dinámica del uso de capacidades instaladas sectoriales (gráfica 6), donde también se identifica la convergencia a ciclos anti-horarios en el plano $u_1 - u_2$.

Cabe indicar que la complejidad del sistema dinámico definido por las ecuaciones (50) a (53) impide describir con precisión cómo sus componentes generan las oscilaciones observadas en las gráficas 3 a 6. De todas formas, pueden plantearse algunas interpretaciones económicas. En concreto, los signos de la ecuación (51) sugieren que el margen de rentabilidad del sector 1 (z_1) hace crecer a la tasa de empleo (l'), debido a que la rentabilidad de este sector incentiva con fuerza la inversión, la expansión de la actividad económica y el mayor empleo de trabajadores. En cambio, los signos de la ecuación (52) indi-

²⁶Dávila-Fernández y Sordi (2019) aplican un procedimiento similar para simular su modelo de ciclos que extiende el trabajo de Goodwin (1967) y consideran exceso de capacidad instalada, productividad endógena y restricciones de balanza de pagos.

²⁷Todas las simulaciones presentadas en este trabajo son estables entre 0 a 2000 unidades temporales. Sin embargo, se presentan resultados sólo de 0 a 500 unidades para facilitar su visualización.

GRÁFICA 3. *Series temporales de variables endógenas*
(simulación 1, modelo simplificado)



FUENTE: elaboración propia mediante los parámetros y los valores iniciales del cuadro 1.

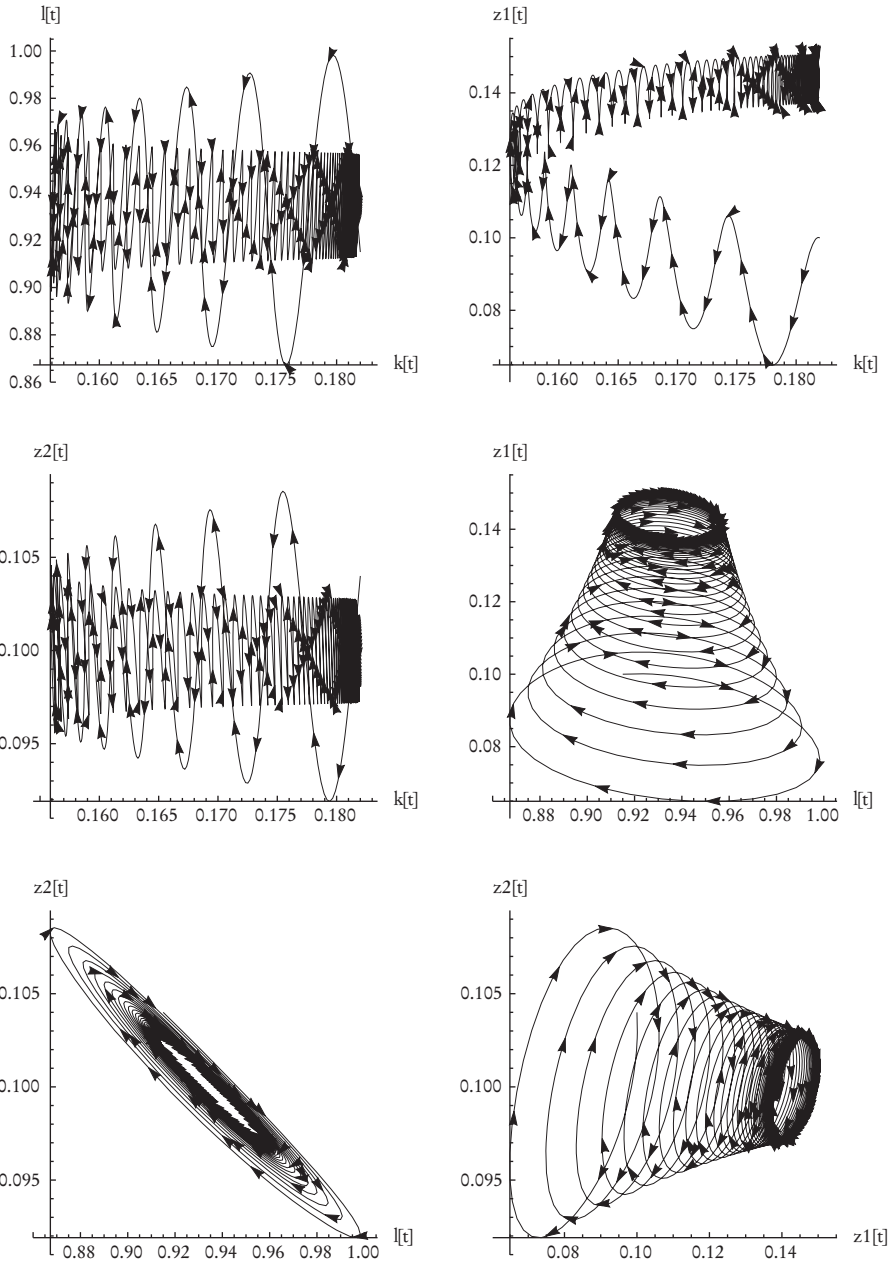
can que la tasa de empleo (l) tiende a reducir el margen del sector 1 (z_1), pues un mayor empleo aumenta el poder de negociación obrero (menor peso del ejército laboral de reserva), lo que provoca que el salario crezca y, por ende, caiga la rentabilidad capitalista del sector 1. Así, entre los principales determinantes del comportamiento cíclico del modelo está la retroalimentación directa (e incluso contradictoria)²⁸ entre la rentabilidad del sector 1 y la tasa de empleo, como sugieren los ciclos observados en el plano $l - z_1$ de la gráfica 4.

La retroalimentación antes descrita se complejiza por varios efectos indirectos. Por ejemplo, los signos de la ecuación (53) sugieren que la tasa de empleo (l) reduce el margen de rentabilidad del sector 2 (z_2),²⁹ lo cual genera una reacción compleja en los valores futuros de todos los márgenes y de la propia tasa de empleo según indican las ecuaciones (51) a (53). Por su parte, los signos de la ecuación (50) plantean que el margen de rentabilidad del sec-

²⁸ Podría decirse que la retroalimentación entre el margen del sector 1 y la tasa de empleo es “dialéctica”. Para una introducción a esta noción desde la obra de Marx, véase Cajas Guijarro (2018).

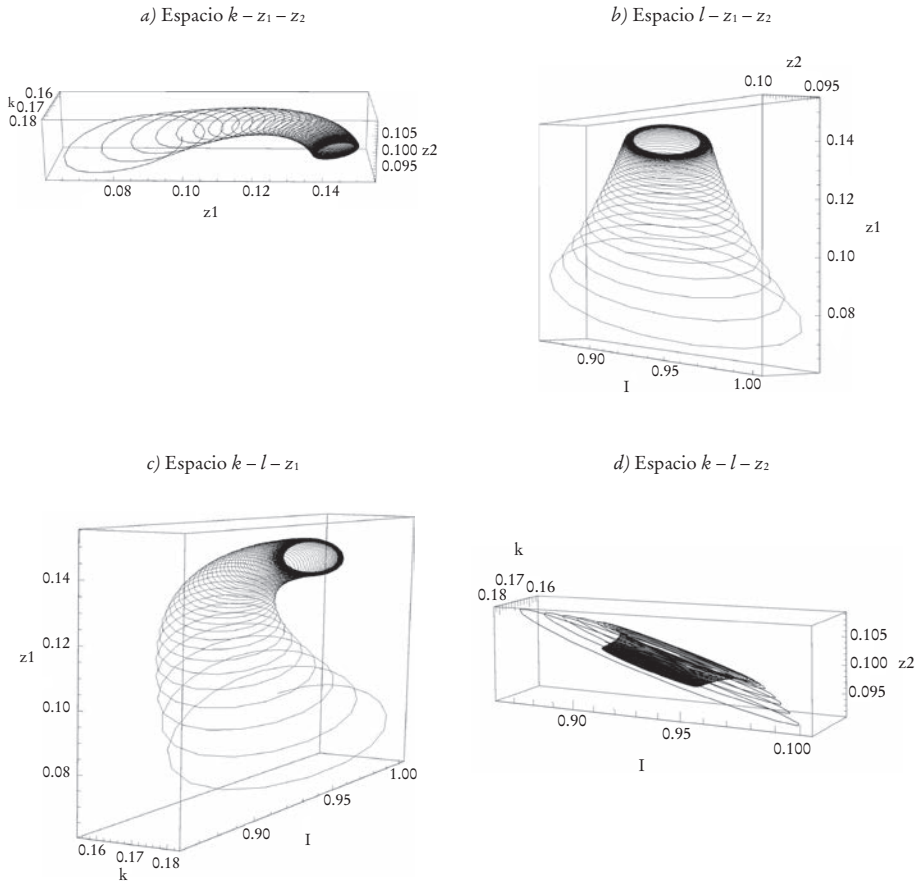
²⁹ De hecho, los ciclos formados entre la tasa de empleo y el margen del sector 2 muestran una marcada inclinación con “pendiente negativa”, como se nota en el plano $l - z_2$ de la gráfica 4.

GRÁFICA 4. Trayectorias en dos dimensiones
(simulación 1, modelo simplificado)



FUENTE: elaboración propia mediante los parámetros y los valores iniciales del cuadro 1.

GRÁFICA 5. Trayectorias en tres dimensiones
(simulación 1, modelo simplificado)

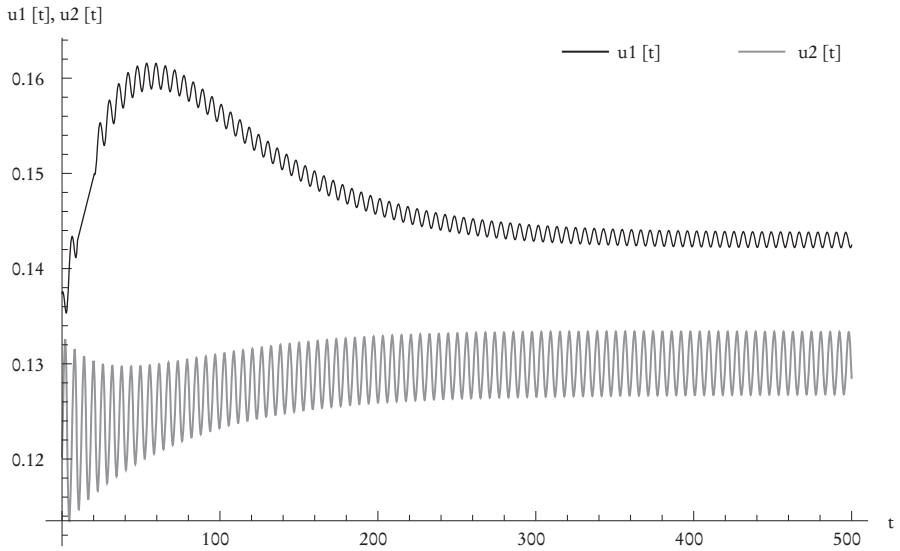


FUENTE: elaboración propia mediante los parámetros y los valores iniciales del cuadro 1.

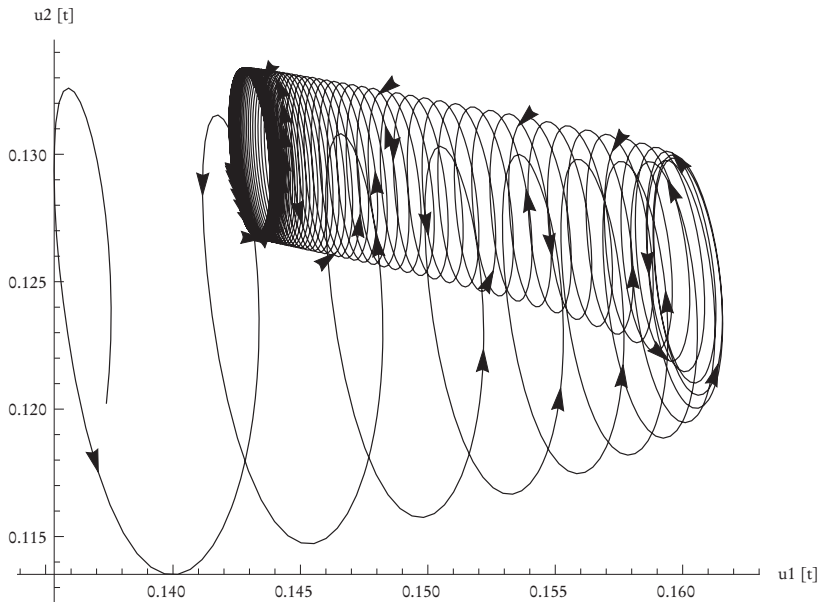
tor 1 (z_1) aumenta la distribución sectorial del capital (k), pues una mayor rentabilidad del sector 1 acelera su acumulación capitalista más rápido que en el sector 2. En consecuencia, los ciclos observados en z_1 se transmiten a k , la cual de todas formas parece estabilizarse con el paso del tiempo, lo que indica que, a largo plazo, la acumulación capitalista del sector 2 logra igualar el ritmo del sector 1. La combinación de estas y otras dinámicas en los márgenes (z_1, z_2) y en la distribución sectorial del capital (k) se transmite al uso de

GRÁFICA 6. Uso de capacidades instaladas
(simulación 1, modelo simplificado)

a) Series temporales

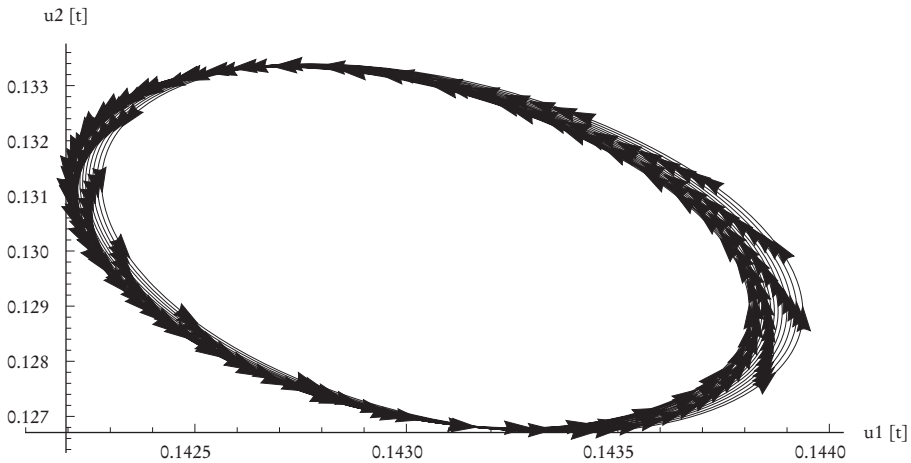


b) Trayectorias en dos dimensiones (0 a 500 periodos)



GRÁFICA 6. *Uso de capacidades instaladas (simulación 1, modelo simplificado)*

c) Trayectorias en dos dimensiones (400 a 500 periodos)



FUENTE: elaboración propia mediante los parámetros y los valores iniciales del cuadro 1.

capacidades instaladas sectoriales (u_1 , u_2), como plantea el equilibrio de corto plazo definido en las ecuaciones (20) y (21), y como se ilustra en la gráfica 6.

Para complementar estas interpretaciones, destaquemos que la estabilidad cíclica del modelo se alcanza cuando el poder de los capitalistas para desacerelar el salario real mediante fallas de indización a la inflación, representado por μ en (44), es lo suficientemente alto como para garantizar que $\mu > \mu^{HB}$. Caso contrario, si μ es demasiado bajo, las simulaciones generan comportamientos inestables. Así, al menos para el modelo simplificado en (50) a (53), el poder capitalista de ampliar la explotación laboral al empujar a la baja el salario real —y agudizar el subconsumo obrero— parece crucial para la estabilidad de los ciclos: cuanta mayor explotación, mayor estabilidad.³⁰ De todas formas, cabe indicar que esta y otras interpretaciones económicas son preliminares y merecen mayor análisis desde versiones futuras más completas del modelo que levanten los supuestos *S18* a *S24*.³¹

³⁰ Una interpretación similar puede encontrarse en Cajas Guijarro (2023).

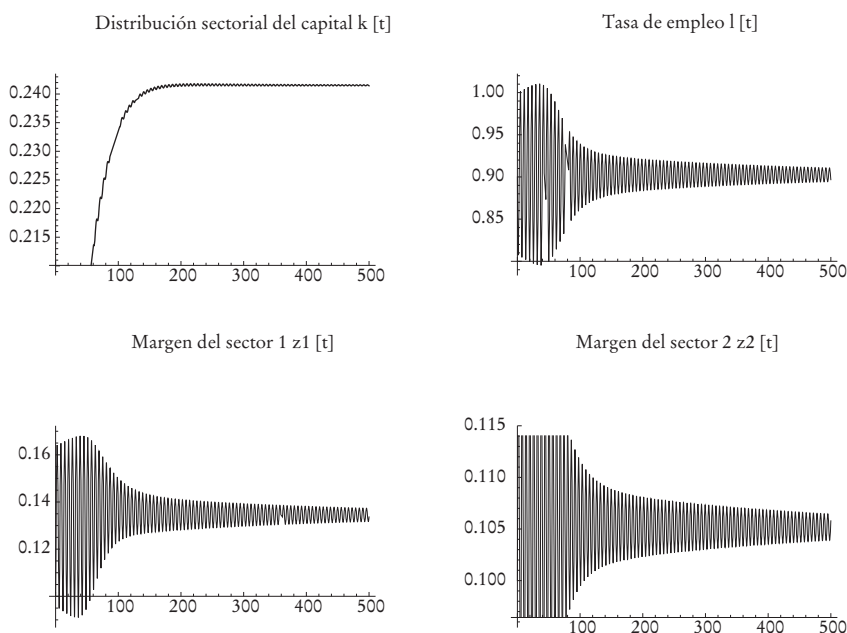
³¹ También notemos que el modelo es muy sensible a sus valores iniciales, pudiendo presentar comportamientos caóticos que también merecen discusión futura.

CUADRO 2. *Parámetros y valores iniciales para la simulación 2 (modelo ampliado)*

Parámetro	s	$\alpha_1 = \alpha_2$	β_1	β_2	τ_1	τ_2	$\theta_1 = \theta_2$	λ_1	λ_2	ρ
Valor	1	0.004	1	0.792	0.05	0	0.022	0.3	2	0.549
Parámetro	ϕ	n	$\zeta_1 = \zeta_2$	μ	q_{21}	k_0	l_0	z_{10}	z_{20}	
Valor	0.491	0.008	0.1	1.6885	0.5	0.182	0.915	0.1	0.104	

FUENTE: elaboración propia a partir de las estimaciones de Grasselli y Maheshwari (2018) para Francia.

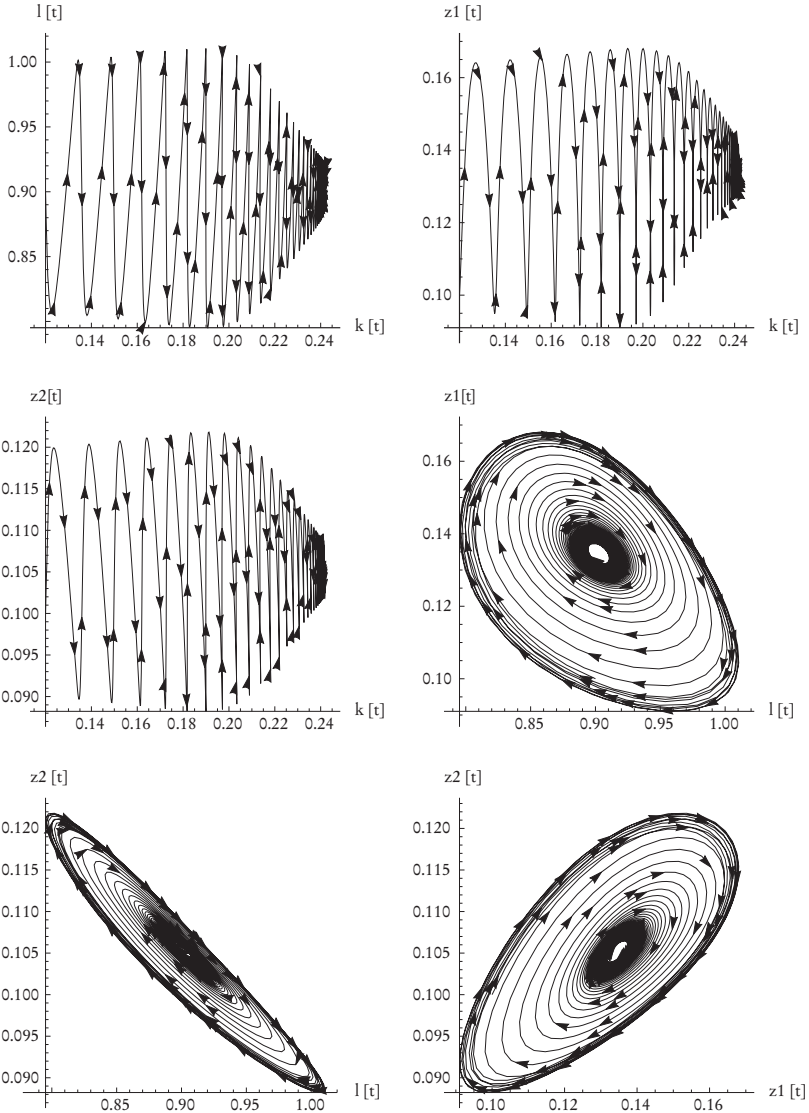
GRÁFICA 7. *Series temporales de variables endógenas (simulación 2, modelo ampliado)*



FUENTE: elaboración propia mediante los parámetros y los valores iniciales del cuadro 2.

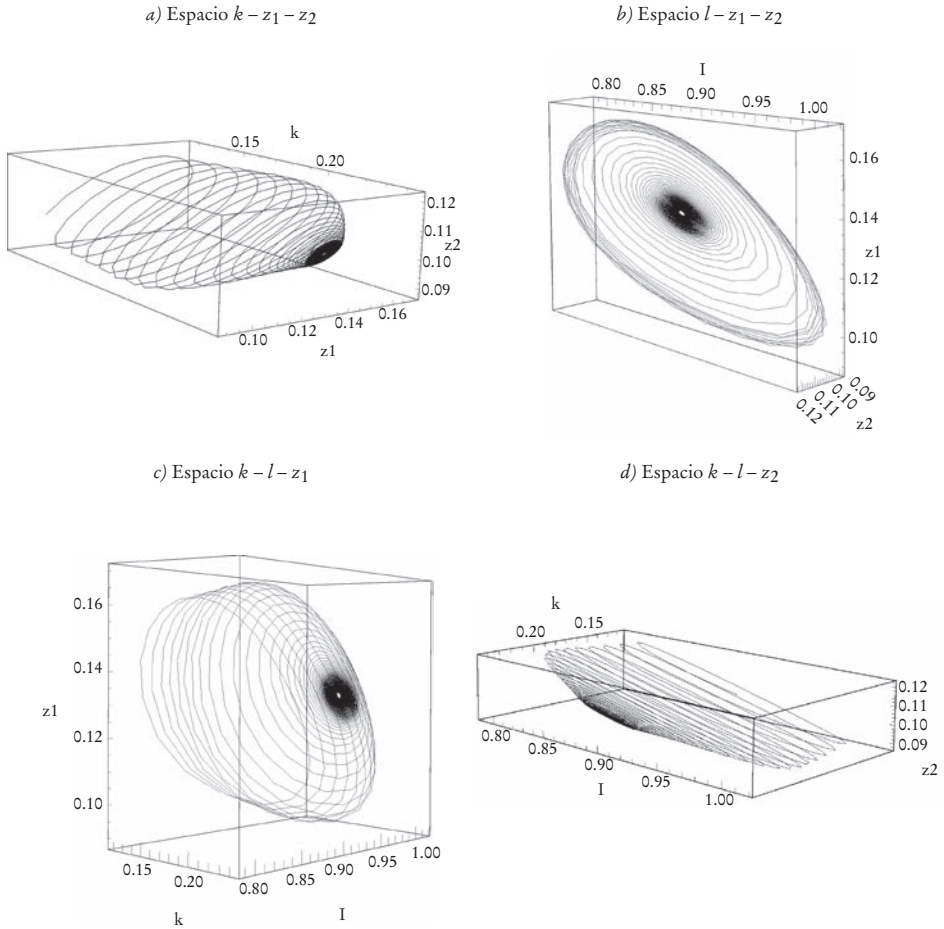
Asimismo, para motivar análisis futuros más complejos, en el cuadro 2 se plantean parámetros y valores iniciales para una versión ampliada del modelo y que pueden aplicarse a la expresión (49), de modo que se levantan algunos de los supuestos $S18$ a $S24$. Nuevamente aclaremos que no se busca calibrar el modelo ampliado a una economía concreta, sino brindar una visualización

GRÁFICA 8. Trayectorias en dos dimensiones
(simulación 2, modelo ampliado)



FUENTE: elaboración propia mediante los parámetros y los valores iniciales del cuadro 2.

GRÁFICA 9. *Trayectorias en tres dimensiones*
(simulación 2, modelo ampliado)

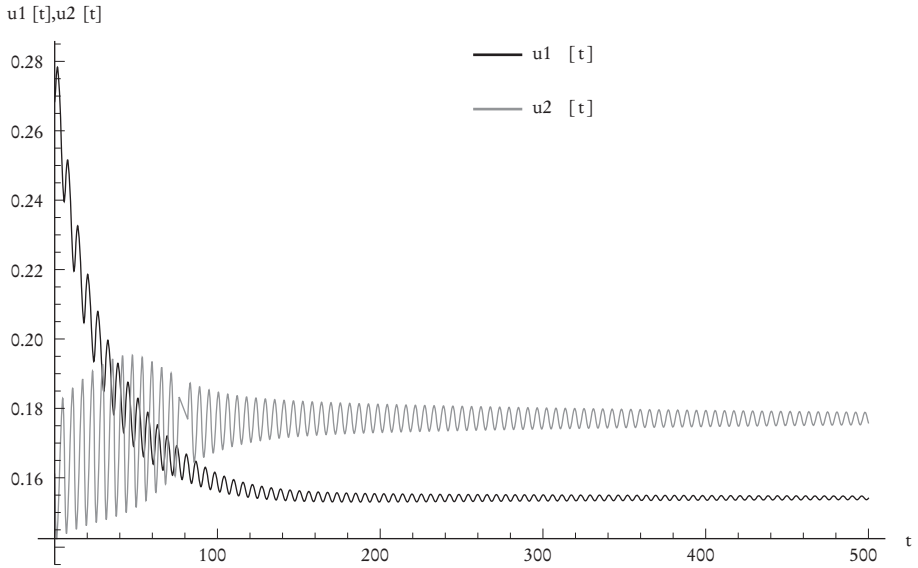


FUENTE: elaboración propia mediante los parámetros y los valores iniciales del cuadro 2.

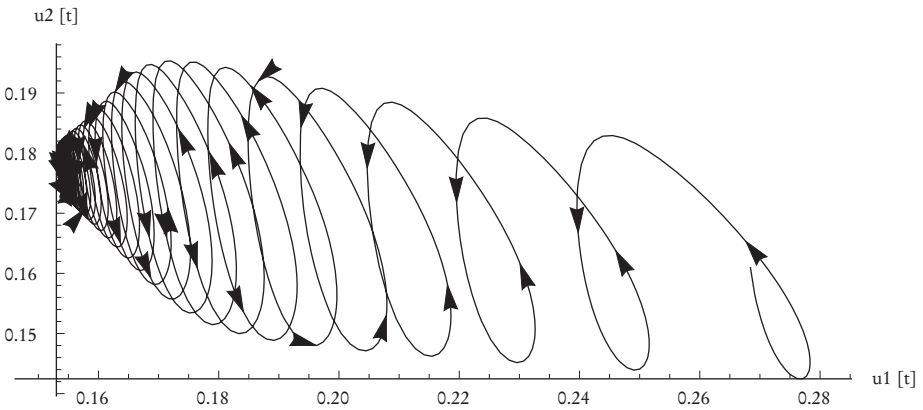
preliminar de su dinámica. Las simulaciones construidas con estos valores (simulación 2) sugieren la existencia de comportamientos cíclicos aún más complejos (gráficas 7 a 10). Pese a su mayor complejidad, se mantiene el sentido de los ciclos identificados en el caso anterior. Precisamente aprovechamos esta persistencia del comportamiento cíclico para reinterpretar la sobreproducción en la siguiente sección.

GRÁFICA 10. *Uso de capacidades instaladas*
(simulación 2, modelo ampliado)

a) Series temporales

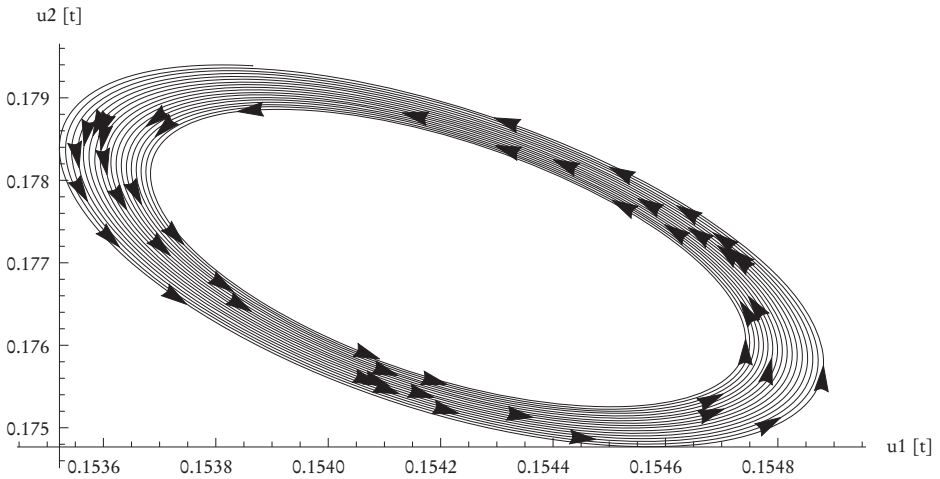


b) Trayectorias en dos dimensiones (0 a 500 periodos)



GRÁFICA 10. *Uso de capacidades instaladas*
(simulación 2, modelo ampliado)

c) Trayectorias en dos dimensiones (400 a 500 periodos)

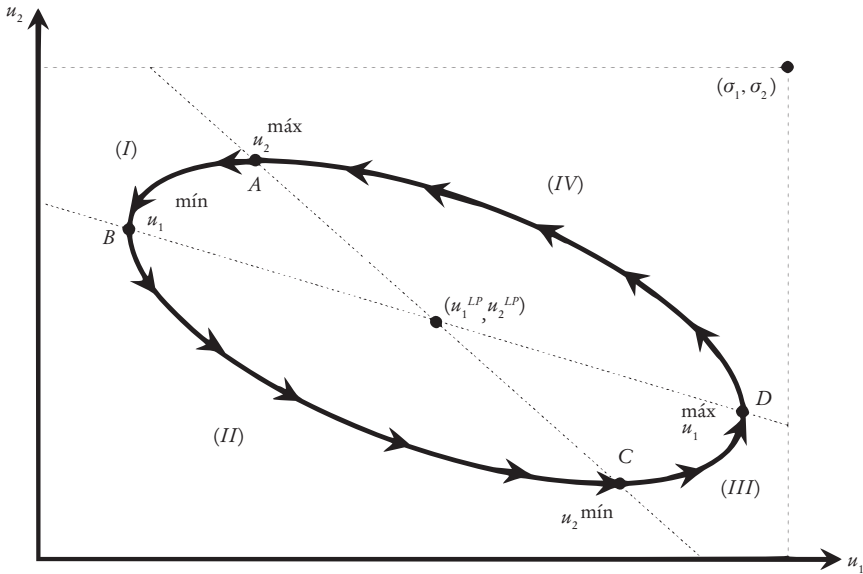


FUENTE: elaboración propia mediante los parámetros y los valores iniciales del cuadro 2.

IV. SOBREPDUCCIÓN Y CICLOS

Desde los resultados de la sección III puede retomarse la hipótesis de trabajo de este artículo, la cual, recordemos, asume que los ciclos capitalistas están intrínsecamente vinculados con la sobreproducción en un contexto sectorial. Con esta hipótesis, la sobreproducción puede reinterpretarse como la inviabilidad del pleno empleo de capacidades instaladas sectoriales, que resulta irrelevante para describir el ciclo capitalista. A fin de desarrollar esta reinterpretación, aprovechamos el comportamiento cíclico de largo plazo identificado en el plano u_1-u_2 de las gráficas 6 y 10, y que se ilustra, de forma simplificada, en la gráfica 11. Dicha gráfica sugiere un ciclo antihorario donde el uso de capacidades instaladas sectoriales fluctúa alrededor del punto de equilibrio de largo plazo (u_1^{LP} , u_2^{LP}). Por interpretaciones económicas previas sabemos que este ciclo en el uso de capacidades instaladas sectoriales es resultado de la retroalimentación (contradictoria) entre la

GRÁFICA 11. Potencial ciclo de largo plazo en uso de capacidades instaladas sectoriales



FUENTE: elaboración propia a partir de las simulaciones construidas con los parámetros y los valores iniciales de los cuadros 1 y 2.

rentabilidad capitalista (sobre todo el margen del sector 1) y la tasa de empleo. Es decir, el ciclo en el plano $u_1 - u_2$ de la gráfica 11 es consecuencia del ciclo distributivo capitalista, contextualizado en un escenario con variaciones en los *stocks* de capital que modifican su distribución sectorial (pero que no son el principal determinante del ciclo).³² A su vez, este ciclo se asocia con ciclos observados en otras variables, por ejemplo, los márgenes de rentabilidad, como plantea la gráfica 12.

Para el modelo simplificado representado en (50) a (53), el punto de equilibrio (u_1^{LP}, u_2^{LP}) , alrededor del cual fluctúan los ciclos en el plano $u_1 - u_2$, puede deducirse al remplazar (54) a (57) en (20), (21) y (22), y aplicar los supuestos S18 a S24, lo cual resulta en:

$$u_1^{LP} = [\theta(\theta - \alpha)(1 - \beta_2)] / [\theta(1 - \beta_2) - \alpha] \quad (59)$$

³² Este detalle marca una diferencia entre interpretaciones kaleckianas que ubican al cambio en los *stocks* de capital como el principal determinante de los ciclos y el presente modelo, donde los ciclos son impulsados principalmente por la disputa distributiva entre clases sociales, similar al planteamiento de Goodwin (1967).

$$u_2^{LP} = [q_{21}\theta(\theta - \alpha)(1 - \beta_2)]/\alpha\beta_2\zeta_2 \quad (60)$$

Donde α , β_2 , ζ_2 , θ y q_{21} son tales que el equilibrio (u_1^{LP} , u_2^{LP}) y los ciclos que fluctúan a su alrededor siempre están por debajo del pleno uso de capacidades instaladas representado en el punto (σ_1, σ_2) , como lo ilustra la gráfica 11. Es decir, en efecto, el pleno empleo de capacidades resulta irrelevante para describir el ciclo capitalista en el presente modelo.

La gráfica 11 también distingue cuatro fases del ciclo capitalista que permiten caracterizar las diferentes formas que adopta la sobreproducción.³³ Así, al iniciar la fase (I) (punto *A*), el uso de capacidad instalada del sector 2 alcanza su nivel máximo dentro del ciclo ($u_2^{\text{máx}}$),³⁴ lo que sugiere que la demanda de consumo de los trabajadores también alcanza su nivel más alto en términos relativos. Sin embargo, la demanda obrera elevada resulta del crecimiento salarial de fases previas del ciclo, lo que debilita la rentabilidad y merma la propensión a invertir (sobreacumulación decreciente); esto genera una reducción futura del empleo y del poder de negociación obrero, lo cual implica una desaceleración futura del propio salario y del consumo (subconsumo creciente).³⁵ Por ende, al avanzar la fase I, decaen la demanda de consumo y el uso de capacidades del sector 2 ($\downarrow u_2$); también cae el uso de capacidades del sector 1 ($\downarrow u_1$), pues la rentabilidad reducida y la merma en la inversión debilitan la demanda de bienes de capital. Por esta caída generalizada de la demanda, denominamos a la fase I del ciclo como “depresión”.³⁶

Como resultado de la dinámica de la fase I, se llega al inicio de la fase II (punto *B*), donde el uso de capacidades del sector 1 es mínimo dentro del

³³ Aquí mantenemos los supuestos *S7* de trabajadores que consumen todo su salario y *S18* de capitalistas que ahorran todas sus ganancias, donde el ahorro es un resultado endógeno que no limita la realización de la inversión gracias a las finanzas y el crédito. Asimismo, por el supuesto *S11* resumido en la función de inversión de la ecuación (3), asumimos que siempre las expectativas de rentabilidad y de demanda motivan a los capitalistas a invertir y adquirir medios de producción sin que necesariamente se use toda la capacidad instalada. De hecho, como plantea Dutt (2015), asumimos que las empresas capitalistas siempre tendrán incentivos para mantener excesos de capacidad instalada como respuesta a la incertidumbre.

³⁴ El “nivel máximo” de las tasas de uso de capacidades instaladas sectoriales ($u_i^{\text{máx}}$) se refiere al nivel más alto alcanzable dentro del ciclo, el cual es menor al nivel de pleno empleo (σ_i). Es decir, $u_i^{\text{máx}} < \sigma_i$, $i = 1, 2$.

³⁵ Nótese que los fenómenos de sobreacumulación y subconsumo obrero persisten a lo largo de todo el ciclo capitalista, pero su magnitud relativa cambia conforme el ciclo avanza de una fase a otra.

³⁶ La nomenclatura empleada para las fases del ciclo de la gráfica 11 guarda concordancia con la nomenclatura empleada por Grasselli y Maheshwari (2018) en su interpretación del modelo de ciclos de Goodwin (1967).

ciclo (u_1^{\min}). Sin embargo, la desaceleración del salario resultante de la fase anterior —reflejada en la caída del uso de capacidades del sector 2 ($\downarrow u_2$) (subconsumo creciente)— empieza a reactivar la rentabilidad y la inversión, lo que expande la demanda de bienes de capital y del uso de capacidades del sector 1 ($\uparrow u_1$) (sobreacumulación creciente). Tal comportamiento, donde la demanda de bienes de capital se reactiva, permite denominar a la fase II del ciclo como “recuperación”.

Este comportamiento persiste hasta iniciar la fase III (punto C), donde el uso de capacidades del sector 2 es mínimo (u_2^{\min}). Pero aquí la reactivación de la inversión observada en la fase anterior —representada en la expansión del uso de capacidades del sector 1 ($\uparrow u_1$) (sobreacumulación creciente)— induce un crecimiento generalizado del empleo y del poder de negociación obrero, y así se recuperan el salario, la demanda de consumo y el uso de capacidades del sector 2 ($\uparrow u_2$) (subconsumo decreciente) a medida que avanza la fase III. Así, a esta fase con aumento general de la demanda la denominamos *boom*.

Finalmente, como resultado de la fase III se llega al inicio de la fase IV (punto D), donde el uso de capacidades del sector 1 alcanza su nivel máximo en el ciclo (u_1^{\max}). De nuevo hay un cambio de dinámica, pues la expansión salarial de la fase previa —visible en el crecimiento del uso de capacidades del sector 2 ($\uparrow u_2$) (subconsumo decreciente)— comienza a mermar la rentabilidad y la inversión, aunque mantiene la expansión de la demanda de consumo. Como resultado, decae la demanda de bienes de capital y el uso de capacidades del sector 1 ($\downarrow u_1$) (sobreacumulación decreciente). Como aquí inicia la caída de la demanda de bienes de capital, denominamos a esta fase como “recesión”, la cual se mantiene hasta retornar al inicio de la depresión (punto A).

Las cuatro fases del ciclo previamente analizadas también son visibles al comparar el uso de capacidades instaladas sectoriales con los márgenes de rentabilidad, como muestra la gráfica 12. Desde esta gráfica se nota que el uso de capacidades y el margen del sector 1 se mueven en el mismo sentido (“ciclos con pendiente positiva” en el plano u_1-z_1), mientras que el uso de capacidades y el margen del sector 2 se mueven en sentido contrario (“ciclos con pendiente negativa” en el plano u_2-z_2). Este resultado admite algunas interpretaciones económicas. Por un lado, la rentabilidad del sector 1 se beneficia de las fases del ciclo que muestran sobreacumulación creciente por el efecto inmediato del aumento de la demanda de bienes de capital. Por otro

CUADRO 3. *Formas de la sobreproducción en cada fase del ciclo de largo plazo*

<i>Fase cíclica</i>	<i>Nomenclatura</i>	<i>Características de la fase</i>	<i>Dinámica en uso de capacidades y márgenes</i>
I	Depresión	Sobreacumulación decreciente Subconsumo creciente	$\downarrow u_1, \downarrow u_2, \downarrow z_1, \uparrow z_2$
II	Recuperación	Subconsumo creciente Sobreacumulación creciente	$\downarrow u_2, \uparrow u_1, \uparrow z_2, \uparrow z_1$
III	<i>Boom</i>	Sobreacumulación creciente Subconsumo decreciente	$\uparrow u_1, \uparrow u_2, \uparrow z_1, \downarrow z_2$
IV	Recesión	Subconsumo decreciente Sobreacumulación decreciente	$\uparrow u_2, \downarrow u_1, \downarrow z_2, \downarrow z_1$

FUENTE: elaboración propia.

podría complejizarse más si, por ejemplo, se agrega el supuesto de que el uso de capacidades instaladas sectoriales no alcanza ni siquiera su equilibrio de corto plazo, de modo que siempre existiría un exceso de demanda (positivo o negativo) que generaría pérdidas a los capitalistas (sea por el costo de oportunidad de la demanda no aprovechada o por las mercancías que no logran venderse). Como resultado, luego de hacer los respectivos ajustes, podría obtenerse un sistema de seis ecuaciones diferenciales con seis variables endógenas: k, l, z_1, z_2, u_1 y u_2 . Tal reformulación se aproximaría aún más a la comprensión analítica de la sobreproducción desde un enfoque cíclico que incluya desequilibrios de mercado, pero aumentaría la complejidad del modelo, de modo que también se deja planteada para trabajos futuros.

V. CONCLUSIÓN

Marx planteó varias intuiciones para interpretar la sobreproducción como la producción de una cantidad de mercancías en exceso comparada con la demanda efectiva del mercado. En este artículo se asume que tal fenómeno es una característica innata de los ciclos capitalistas. Pese a que éste es un tema muy discutido en el análisis crítico del capitalismo, son escasos los esfuerzos para darle una formalización rigurosa que permita comprender su dinámica, sobre todo en las diferentes fases de los ciclos capitalistas. Tal situación es peculiar con base en que el propio Marx consideraba que sobreproducción y ciclos tienen un vínculo relevante. Como

respuesta, el presente artículo ha presentado un modelo bisectorial de ciclos distributivos y sobreproducción (con elementos marxistas y kaleckianos) que junta el modelo bisectorial con poder de mercado de Dutt (1988) (el cual incluye un equilibrio de corto plazo en el uso de capacidades instaladas sectoriales) con elementos del modelo de ciclos distributivos de Goodwin (1967) y el modelo agregado de crecimiento y distribución de Dutt (1987).

Como principal resultado se demostró analíticamente que, con la definición de largo plazo planteada por Dutt (1988) (considerando acumulación de capital), los componentes del modelo generan ciclos estables en las siguientes variables endógenas: distribución sectorial del capital, tasa de empleo y márgenes de rentabilidad en los sectores productores de bienes de capital y de consumo. Estos ciclos emergen de la disputa distributiva entre clases sociales, y mantienen un comportamiento estable cuando los capitalistas poseen el poder suficiente para reducir el salario real (y vigorizar el subconsumo obrero). Una consecuencia de este resultado es el surgimiento de ciclos de largo plazo en el uso de capacidades instaladas sectoriales, lo cual permite reinterpretar la sobreproducción con base en que los fenómenos de la sobreacumulación y el subconsumo muestran magnitudes relativas que cambian según las diferentes fases del ciclo capitalista. En medio de esta reinterpretación se nota que el pleno uso de capacidades instaladas no es un caso relevante.

El presente modelo brinda bases para varias investigaciones futuras a fin de construir versiones que den más énfasis a la dinámica del sector 1, productor de medios de producción, y a sus precios; analizar el comportamiento cíclico en otras variables de interés, como los precios o el salario nominal; profundizar en el estudio del modelo para encontrar no sólo comportamientos cíclicos sino también caóticos (por ejemplo, sensibilidad a condiciones iniciales, comportamientos oscilatorios irregulares y no linealidades); estimar los parámetros del modelo para economías concretas con base en enfoques cercanos a Grasselli y Maheshwari (2018); ahondar en los efectos que pueden tener diferentes formas de distribución del poder de negociación entre obreros y capitalistas sobre la estabilidad de los ciclos; ampliar el modelo a un sistema dinámico de seis ecuaciones diferenciales que incluya los efectos del exceso de demanda; combinar los resultados del presente modelo con el estudio teórico y analítico de diferentes formas de crisis capitalistas (por ejemplo, desproporcionalidad sectorial, caída de tasa de ganan-

cia). Desde estas y otras líneas de trabajo futuro, puede seguirse aportando a la teorización y la modelización de las estructuras y los ciclos capitalistas desde un enfoque de economía política analítica y crítica.

APÉNDICE 1. PRUEBA DE ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO CON SALARIO Y PRECIOS VARIABLES

A fin de analizar la estabilidad local del sistema (50) a (53) alrededor del punto $(k^{LP}, l^{LP}, z_1^{LP}, z_2^{LP})$, podemos emplear su aproximación lineal:

$$\begin{bmatrix} k' \\ l' \\ z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix}}_{J^*} \begin{bmatrix} k - k^{LP} \\ l - l^{LP} \\ z_1 - z_1^{LP} \\ z_2 - z_2^{LP} \end{bmatrix} \quad (1a)$$

donde la matriz jacobiana J^* evaluada en $(k^{LP}, l^{LP}, z_1^{LP}, z_2^{LP})$ es:

$$J^* \Big|_{(k^{LP}, l^{LP}, z_1^{LP}, z_2^{LP})} = \begin{bmatrix} -(0-a) & 0 & \frac{\theta-\alpha}{\beta_2} & 0 \\ 0 & (\theta+\phi)(1-\zeta_2) & \frac{\alpha(\theta+\phi)}{\rho(1-\beta_2)} & \frac{\lambda_2(\theta+\phi)[\zeta_2(1-\mu)+\mu]}{\rho\zeta_2} \\ 0 & \frac{-\rho\theta(1-\beta_2)}{\alpha} & 0 & \frac{\lambda_2\theta(1-\mu)(1-\beta_2)}{\alpha} \\ 0 & -\rho(1-\zeta_2) & 0 & -\lambda_2\mu(1+\zeta_2) \end{bmatrix} \quad (2a)$$

La ecuación característica de J^* es:

$$x_4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0 \quad (3a)$$

La condición necesaria y suficiente para la estabilidad local de $(k^{LP}, l^{LP}, z_1^{LP}, z_2^{LP})$ es que todas las raíces x de la ecuación característica tengan partes reales negativas. Por las condiciones de Routh-Hurwitz, este resultado requiere que todos los coeficientes b_1, b_2, b_3 y b_4 sean positivos y que $y = b_1b_2b_3 - b^2_1b_4 - b^2_3 > 0$.

Respecto a b_1, b_2, b_3 y b_4 , estos coeficientes dependen de la traza T^{LP} , del determinante Δ^{LP} y de los menores de J^* , siendo iguales a:

$$b_1 = -T^{LP} = (\theta - \alpha) + \lambda_2 \mu (1 + \zeta_2) - [((1 - \zeta_2)(\theta + \phi))/\zeta_2] \quad (4a)$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{14} \\ J_{41} & J_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{22} & J_{24} \\ J_{42} & J_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{33} & J_{34} \\ J_{43} & J_{44} \end{vmatrix} \quad (5a)$$

$$b_2 = \lambda_2(1 + \zeta_2)[\theta + \phi + \mu(\theta - \alpha)] - (\theta + \phi)[((1 - \zeta_2)(\theta - \alpha)/\zeta_2) + \theta] \quad (6a)$$

$$b_3 = - \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{24} \\ J_{41} & J_{42} & J_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} & J_{14} \\ J_{31} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{43} & J_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{vmatrix} \quad (7a)$$

$$b_3 = (\theta + \phi)[\lambda_2(2\theta - \alpha)(1 + \zeta_2) + \theta(\theta - \alpha)] \quad (8a)$$

$$b_4 = \Delta^{LP} = \theta \lambda_2(1 + \zeta_2)(\theta - \alpha)(\theta + \phi) \quad (9a)$$

Si $\alpha < \theta$ (condición consistente con un equilibrio positivo como sugieren [54] y [56]), entonces b_1, b_2, b_3 y b_4 son positivos cuando λ_2 es suficientemente grande como para cumplir:

$$\lambda_2 > [((\theta + \phi)(1 - \zeta_2))/\mu \zeta_2(1 + \zeta_2)] - (\theta - \alpha) \quad (10a)$$

$$\lambda_2 > [(\theta + \phi)((\theta - \alpha) + \alpha \zeta_2)]/[\zeta_2(1 + \zeta_2)(\theta + \phi + \mu(\theta - \alpha))] \quad (11a)$$

Por su parte, $y = b_1 b_2 b_3 - b^2_1 b_4 - b^2_3$ es igual a un polinomio cuadrático con respecto a μ :

$$y = b_1 b_2 b_3 - b^2_3 - b^2_1 b_4 = (\theta + \phi)(A_1 \mu^2 + A_2 \mu + A_3) \quad (12a)$$

donde:

$$A_1 = \lambda^2_2(\theta - \alpha)^2(1 + \zeta_2)^2[\lambda_2(1 + \zeta_2) + \theta] \quad (13a)$$

$$A_2 = \lambda_1(1 - \zeta_2)\{H_1 H_2 + H_3(\theta - \alpha)[2\theta \lambda_1(1 - \zeta_2) - H_1]\} \quad (14a)$$

$$A_3 = H_1 H_2 H_3 + \lambda_2 \theta (\theta - \alpha) (1 + \zeta_2) H^2_3 - (\theta + \phi) H^2_1 \quad (15a)$$

$$H_1 = \lambda_2 (2\theta - \alpha) (1 + \zeta_2) + \theta (\theta - \alpha) \quad (16a)$$

$$H_2 = \{(\theta + \phi)[(1 + \zeta_2)(\lambda_2 \zeta_2 - \theta) + \alpha]\} / \zeta_2 \quad (17a)$$

$$H_3 = [(1 - \zeta_2)(\theta + \phi) + \zeta_2(\theta - \alpha)] / \zeta_2 \quad (18a)$$

En este polinomio se nota que $A_1 > 0$. Por ende, cuando μ es lo suficientemente grande, se cumple que $y = b_1 b_2 b_3 - b^2_1 b_4 - b^2_3 > 0$. Así, valores altos de λ_2 y μ garantizan la estabilidad del equilibrio de largo plazo (k^{LP} , l^{LP} , z_1^{LP} , z_2^{LP}).

APÉNDICE 2. PRUEBA DE LA EXISTENCIA DE CICLOS PERSISTENTES CON SALARIO Y PRECIOS VARIABLES

Con base en Asada y Yoshida (2003), para demostrar que existe un comportamiento cíclico persistente en el sistema (50) a (53) alrededor del punto (k^{LP} , l^{LP} , z_1^{LP} , z_2^{LP}), se requiere verificar dos condiciones. Primero, todos los coeficientes b_1 , b_2 , b_3 y b_4 deben ser positivos, situación que se garantiza cuando λ_2 es lo suficientemente alto, como lo indica el apéndice 1.

Segundo, si se define $y = b_1 b_2 b_3 - b^2_1 b_4 - b^2_3$ y se toma a μ como parámetro de bifurcación, entonces se requiere verificar que existe un valor crítico μ^{HB} tal que $y|_{\mu=\mu^{HB}} = 0$ y $dy/dx|_{\mu=\mu^{HB}} \neq 0$. Así, del apéndice 1 se sabe que y es un polinomio cuadrático:

$$y = b_1 b_2 b_3 - b^2_3 - b^2_1 b_4 = (\theta + \phi)(A_1 \mu^2 + A_2 \mu + A_3) \quad (19a)$$

Por ende, el valor crítico que genera $y|_{\mu=\mu^{HB}} = 0$ se obtiene de las raíces de y , es decir:

$$\mu^{HB} = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3}}{2A_1} \quad (20a)$$

Donde A_1 , A_2 y A_3 provienen del apéndice 1. Al aplicar estas definiciones y simplificarlas, se obtienen dos raíces:

$$\mu_1^{HB} = \{\theta[\theta(1 - \zeta_2) + \lambda_2(1 - \zeta_2)] + \phi(1 - \zeta_2)[\theta + \lambda_2(1 + \zeta_2)]\} / \{\lambda_2\zeta_2(1 + \zeta_2)[\theta + \lambda_2(1 + \zeta_2)]\} \quad (21a)$$

$$\mu_2^{HB} = -\{[(2\theta - \alpha)(\theta + \phi)/(\theta - \alpha)^2] + ((\theta + \phi)(\theta - \alpha) + 3\theta(\theta - \alpha) + \alpha^2 + 2\theta - \alpha)/(\lambda_2\zeta_2(1 + \zeta_2)(\theta - \alpha))\} \quad (22a)$$

Como $0 < \zeta_2 < 1$, entonces necesariamente $\mu_1^{HB} > 0$ y $\mu_2^{HB} < 0$. Si nos enfocamos en la raíz positiva μ_1^{HB} (consistente con el subconsumo, como indica la expresión [44]), entonces se obtiene la siguiente derivada:

$$\begin{aligned} dy/d\mu|_{\mu=\mu^{HB}} &= \lambda_2(\theta - \alpha)(1 + \zeta_2)[\theta(\theta - \alpha) \\ &+ \lambda_2(1 + \zeta_2)(2\theta - \alpha)]H_5 \end{aligned} \quad (23a)$$

donde:

$$H_5 = \theta[\lambda_2(1 + \zeta_2)(\theta + \phi) + 2(\theta - \alpha) + \phi] + \alpha^2 \quad (24a)$$

La cual siempre es positiva si $\alpha < \theta$ (para μ_2^{HB} se obtiene $dy/d\mu|_{\mu=\mu_2^{HB}} = -dy/d\mu|_{\mu=\mu_1^{HB}}$). Por ende, cuando μ se aproxima a μ_1^{HB} , se confirma la existencia de un comportamiento cíclico persistente. A su vez, ese comportamiento será estable cuando $\mu > \mu_1^{HB}$, dado el resultado del apéndice 1. Es decir, existirá un comportamiento cíclico persistente y estable cuando μ se aproxime a μ_1^{HB} por la derecha ($\mu \rightarrow \mu_1^{HB+}$). Sin embargo, esta aproximación no es perfecta, pues μ_1^{HB} se obtuvo desde una aproximación lineal del modelo alrededor del punto de equilibrio de largo plazo (véase el apéndice 1), por ende, pueden existir elementos no lineales que generen inestabilidad incluso para valores a la derecha de μ_1^{HB} y que no suelen ser identificados por su aproximación lineal (aunque sí pueden visualizarse sus efectos indirectamente con simulaciones numéricas).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asada, T., y Yoshida, H. (2003). Coefficient criterion for four-dimensional Hopf bifurcations: A complete mathematical characterization and applications to economic dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*,

- 18(3), 525-536. Recuperado de: [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(02\)00674-4](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00674-4)
- Barrales-Ruiz, J., Mendieta-Muñoz, I., Rada, C., Tavani, D., y Arnim, R. von (2022). The distributive cycle: Evidence and current debates. *Journal of Economic Surveys*, 36(2), 468-503. Recuperado de: <https://doi.org/10.1111/joes.12432>
- Basu, D. (2016). Underconsumption, capitalist investment and crisis: A reply to Sardoní. *Review of Keynesian Economics*, 4(2), 208-218. Recuperado de: <https://doi.org/10.4337/roke.2016.02.06>
- Bauer, O. (1913). Die Akkumulation des Kapitals. *Die Neue Zeit*, 31(1), 831-838.
- Bauer, O. (1936). *Zwischen zwei Weltkriegen?* Bratislava: Eugen Prager Verlag.
- Bernard, L., Gevorkyan, A. V., Palley, T. I., y Semmler, W. (2014). Time scales and mechanisms of economic cycles: A review of theories of long waves. *Review of Keynesian Economics*, 2(1), 87-107. Recuperado de: <https://doi.org/10.4337/roke.2014.01.05>
- Bronfenbrenner, M. (1966). The Marxian macro-economic model: Extension from two departments. *Kyklos*, 19(2), 201-218. Recuperado de: <https://doi.org/10.1111/j.1467-6435.1966.tb02501.x>
- Cajas Guijarro, J. (2018). Materialismo histórico-dialéctico: Una crítica a sus fundamentos. *Filosofía de la Economía*, 7(2), 137-155. Recuperado de: <https://ojs.econ.uba.ar//index.php/CIECE/article/view/1908>
- Cajas Guijarro, J. (2022). Revisitando la reproducción capitalista: equilibrio, redes y competencia intersectorial. *Problemas del Desarrollo*, 53(208), 151-183. Recuperado de: <https://doi.org/10.22201/iiec.20078951e.2022.208.69729>
- Cajas Guijarro, J. (2023). Poder, intensidad del trabajo y crisis en un modelo marxista de ciclos endógenos. *El Trimestre Económico*, 90(358), 365-407. Recuperado de: <https://doi.org/10.20430/ete.v90i358.1574>
- Cajas Guijarro, J., y Vera, L. (2022). The macrodynamics of an endogenous business cycle model of Marxist inspiration. *Structural Change and Economic Dynamics*, 62, 566-585. Recuperado de: <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2022.08.002>
- Dávila-Fernández, M., y Sordi, S. (2019). Distributive cycles and endogenous technical change in a BoPC growth model. *Economic Modelling*, 77, 216-233. Recuperado de: <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2018.09.002>

- Dutt, A. (1987). Alternative closures again: A comment on 'Growth, distribution and inflation'. *Cambridge Journal of Economics*, 11(1), 75-82. Recuperado de: <https://www.jstor.org/stable/23598097>
- Dutt, A. (1988). Convergence and equilibrium in two sector models of growth, distribution and prices. *Journal of Economics*, 48(2), 135-158. Recuperado de: <https://www.jstor.org/stable/41793901>
- Dutt, A. (2015). Uncertainty, power, institutions, and crisis: Implications for economic analysis and the future of capitalism. *Review of Keynesian Economics*, 3(1), 9-28. Recuperado de: <https://doi.org/10.4337/roke.2015.01.02>
- Georgescu-Roegen, N. (1960). Mathematical proofs of the breakdown of capitalism. *Econometrica*, 28(2), 225-243. Recuperado de: <https://doi.org/10.2307/1907718>
- Goldstein, J. P. (1997). Is the endogenous business cycle dead? *Southern Economic Journal*, 63(4), 962-977. Recuperado de: <https://doi.org/10.2307/1061234>
- Goodwin, R. (1967). A growth cycle. En C. H. Feinstein (ed.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth* (pp. 54-58). Cambridge: Cambridge University Press.
- Grasselli, M., y Maheshwari, A. (2018). Testing a Goodwin model with general capital accumulation rate. *Metroeconomica*, 69(3), 619-643. Recuperado de: <https://doi.org/10.1111/meca.12204>
- Harris, D. (1983). Accumulation of capital and the rate of profit in Marxian theory. *Cambridge Journal of Economics*, 7(3-4), 311-330. Recuperado de: <https://doi.org/10.1093/cje/7.3-4.311>
- Kalecki, M. (1971). *Selected Essays on the Dynamics of the Capitalist Economy 1933-1970*. Cambridge: Cambridge University Press.
- King, J. E. (1986). Otto Bauer's 'Accumulation of capital'. *History of Political Economy*, 18(1), 87-110. Recuperado de: <https://doi.org/10.1215/00182702-18-1-87>
- Luxemburg, R. (2015). *The Accumulation of Capital*. Londres: Routledge.
- Marx, K. (2009a). *El capital. Crítica de la economía política. Libro primero. El proceso de producción del capital*. México: Siglo XXI Editores.
- Marx, K. (2009b). *El capital. Crítica de la economía política. Libro segundo. El proceso de circulación del capital*. México: Siglo XXI Editores.

- Marx, K. (2009c). *El capital. Crítica de la economía política. Libro tercero. El proceso global de la producción capitalista*. México: Siglo XXI Editores.
- McKeown, K. (1987). *Marxist Political Economy and Marxist Urban Sociology*. Nueva York: Palgrave Macmillan.
- Robinson, J. (1956). *The Accumulation of Capital*. Londres: Macmillan.
- Robinson, J. (1962). *Essays in the Theory of Economic Growth*. Londres: Macmillan.
- Sardoni, C. (2015). Is a Marxist explanation of the current crisis possible? *Review of Keynesian Economics*, 3(2), 143-157. Recuperado de: <https://doi.org/10.4337/roke.2015.02.01>
- Shaikh, A. (1978). An introduction to the history of crisis theories. En Union for Radical Political Economics (ed.), *U. S. Capitalism in Crisis* (pp. 219-241). Nueva York: URPE/EEP.
- Sherman, H. (1967). Marx and the business cycle. *Science & Society*, 31(4), 486-504. Recuperado de: <https://www.jstor.org/stable/40401313>
- Sherman, H. (1971). Marxist models of cyclical growth. *History of Political Economy*, 3(1), 28-55. Recuperado de: <https://doi.org/10.1215/00182702-3-1-28>
- Sherman, H. (1979). A Marxist theory of the business cycle. *Review of Radical Political Economics*, 11(1), 1-23. Recuperado de: <https://doi.org/10.1177/048661347901100101>
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Boca Ratón: CRC Press.
- Stockhammer, E. (2018). Post-Keynesian economics. En L. Fischer, J. Hasell, J. C. Proctor, D. Uwakwe, Z. Ward-Perkins y C. Watson (eds.), *Rethinking Economics* (pp. 6-18). Londres: Routledge.
- Sweezy, P. (1942). *The Theory of Capitalist Development*. Oxford: Oxford University Press.
- Trigg, A. (2006). *Marxian Reproduction Schema: Money and Aggregate Demand in a Capitalist Economy*. Londres: Routledge.
- Veneziani, R., y Zamparelli, L. (2017). Analytical political economy. *Journal of Economic Surveys*, 36(2), 271-275. Recuperado de: <https://doi.org/10.1111/joes.12496>