

Métodos difusos de medición multidimensional de la pobreza: una revisión del estado del arte*

Fuzzy methods of multidimensional measurement of poverty: A review of the state of the art

*Rafael Marcel Asmat Uceda
y Edmundo Rubén Vergara Moreno***

ABSTRACT

This paper reviews the different approaches and policies that are most used in the literature to measure the level of poverty with tools of fuzzy logic. These policies are based on the integrated measurement method (IM), which combines poverty line methods and unmet basic needs. Moreover, we present the most recent studies on the measurement of the level of poverty in different sectors and populations, as well as the more relevant conclusions of the work.

Keywords: Fuzzy logic; poverty; measurement; multidimensional; integrated. *JEL codes:* C02, C61, C65, F01, F02, I31, I32.

RESUMEN

En este trabajo se revisan los diversos enfoques y políticas más utilizados en la literatura para medir el nivel de pobreza mediante las herramientas de la lógica difusa. Estas políticas se basan en el método de medición integrado (MI), el cual combina

* Artículo recibido el 24 de junio de 2023 y aceptado el 7 de diciembre de 2023. Su contenido es responsabilidad exclusiva de los autores.

** Rafael Marcel Asmat Uceda, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo (UNT), Perú (correo electrónico: rasmata@unitru.edu.pe). Edmundo Rubén Vergara Moreno, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, UNT (correo electrónico: evergara@unitru.edu.pe).

los métodos de la línea de pobreza y las necesidades básicas insatisfechas. También se presentan los estudios más recientes sobre la medición del nivel de pobreza en diferentes sectores y poblaciones. Finalmente, se plantean las conclusiones más relevantes del trabajo realizado.

Palabras clave: lógica difusa; pobreza; medición; multidimensional; integrado. *Clasificación JEL:* C02, C61, C65, F01, F02, I31, I32.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, en muchos países del mundo los niveles de pobreza alcanzan situaciones extremas. En ciertos países, como la India, Irán, Perú, México, Brasil y muchos de África se viven diversas situaciones de pobreza que se agravan aún más debido a las precarias condiciones de salud, así como al acceso limitado a servicios básicos y educativos. En 2015 la Asamblea General de las Naciones Unidas adoptó la Agenda 2030, donde se plantearon los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), que consistían en la ejecución de un plan de acción para poner fin a toda situación de pobreza en el mundo. No obstante, no sólo no se han logrado llevar a cabo tales objetivos, sino que la situación de pobreza se agravó aún más debido a la pandemia de covid-19, que afectó los sistemas de salud, servicios básicos y educación precarios que ya había en esas poblaciones.

En América Latina “el principal problema está relacionado con la vivienda y el acceso a los servicios básicos, afectando tanto a niños, jóvenes, adultos y adultos mayores”, según un estudio realizado por la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) y el Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia (UNICEF, por sus siglas en inglés) (2010; CEPAL, 2013). De acuerdo con éste: “Es necesario poner atención a estas áreas sociales, pues la pobreza, la exclusión y la marginalización no provienen exclusivamente de las insuficiencias de ingresos, sino también del desarrollo de subculturas de pobreza sobre la base de la segregación residencial, la precariedad habitacional y la falta de equipamiento comunitario” (CEPAL, 2014).

En Perú la evolución histórica de la pobreza también ha sido objeto de diversos estudios, así como sus formas de medición y sus limitaciones (Elías, 1994). Se han realizado varios trabajos sobre el análisis de las políticas sociales para combatir la pobreza (Anderson, 1994; Parodi, 1997; Portocarrero,

2002), así como sobre las cifras y las dinámicas de la pobreza (Iguíñiz, 1999a y 1999b; Ríquez, 1999).

Uno de los primeros trabajos de la medición de la pobreza en Perú apareció en 2005, por Calvo y Dercon (2005): *Measuring Individual Vulnerability*. Ellos utilizan la vulnerabilidad como medida de magnitud de amenaza de pobreza. En 2008 Calvo propuso una extensión al índice unidimensional de vulnerabilidad desarrollado en el trabajo anterior de 2005, a fin de presentar un ejercicio empírico bidimensional que ilustre su extensión.

Ya en 2010 Castro, Baca y Ocampo presentaron un enfoque multidimensional de la pobreza en su trabajo “(Re)counting the poor in Peru: A multidimensional approach”. Sus resultados indicaron la existencia de un gran riesgo de clasificar como individuos no pobres a quienes sufren de privaciones significativas, si se considera solamente la dimensión monetaria unidimensional. Por otro lado, en 2014 Clausen y Flor propusieron e implementaron una medida de pobreza humana multidimensional para Perú y, desde el punto de vista de la implementación empírica de la metodología de Alkire y Foster (2007), mostraron la grave situación de la Amazonía y el noreste del Perú.

El objetivo de este trabajo es realizar una revisión de los diversos enfoques y políticas utilizados en la literatura para medir el nivel de pobreza multidimensional mediante las herramientas de la lógica difusa introducida por Zadeh (1965) y Terano, Asai y Sugeno (1992). La teoría de conjuntos difusos es una extensión de la de conjuntos, que se basa en la modificación del concepto bivalente de *pertenencia*. En esta teoría, la naturaleza de pertenencia de un objeto respecto a un conjunto no está restringido a la pertenencia o la no pertenencia, sino que tal naturaleza se gradúa en una escala de 0 a 1. El concepto de conjunto difuso permite a la matemática introducirse como herramienta de representación y relación en las ciencias sociales y económicas, en las que muchos fenómenos son de naturaleza subjetiva. De este modo, la teoría de conjuntos difusos permite hacer una representación adecuada del comportamiento de la pobreza y evitar la división dicotómica de las familias entre pobres y no pobres, y también hace posible introducir nuevos métodos de medición multidimensional de la pobreza.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección I se recogen los diversos enfoques difusos multidimensionales más utilizados a fin de medir la pobreza en la literatura existente. En la sección II se revisan los estudios realizados en diversos países y poblaciones para medir el nivel de

pobreza mediante un enfoque difuso multidimensional. En la sección III se presentan las conclusiones, y en el apéndice se abordan los conceptos básicos de conjuntos difusos y la representación de conjuntos difusos como indicadores de pobreza.

I. MEDICIÓN MULTIDIMENSIONAL DE POBREZA

En esta sección se resumen las diversas políticas utilizadas actualmente para medir la pobreza multidimensional mediante las herramientas de la lógica difusa.

1. *Variables de entrada y salida*

El primer paso consiste en identificar los distintos ámbitos de evaluación para luego especificar adecuadamente los conjuntos difusos apropiados. En este paso deben identificarse tanto las variables de entrada como las de salida del análisis. Posteriormente, se establece una correspondencia entre la pobreza y su representación formal en términos de conjuntos difusos.

Por ejemplo, si la variable de entrada es la *línea de pobreza*, ésta puede considerarse en tres niveles: bajo, intermedio y alto. Como consecuencia, pueden deducirse tres conjuntos difusos para esta línea de pobreza: bajo, medio y alto. Si la variable de salida también es la *línea de pobreza*, esto da origen a tres subconjuntos: privación fuerte, privación media y privación débil.

2. *Funciones de pertenencia*

El segundo paso consiste en asignar grados o puntuaciones de pertenencia, a fin de estimar las funciones de pertenencia apropiadas. Debido a la naturaleza multidimensional de la pobreza, debe evaluarse el grado de pertenencia de cada individuo o familia al subconjunto difuso a partir de un grupo de indicadores de las condiciones de vida, tanto cualitativas como cuantitativas. Las variables elegidas se refieren a un aspecto determinado de pobreza, ya sea por la privación de un determinado bien o una actividad, o que represente un síntoma de pobreza. Se distinguen tres categorías de variables: dicotómicas, cualitativas y continuas. Para cada una de estas categorías se consideran las siguientes formas generales de funciones de pertenencia.

Por el conjunto de indicadores de las condiciones de vida, $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]$, se considera Ξ_j el subconjunto de individuos u hogares que padece alguna privación de acuerdo con el indicador $\xi_j, j = 1, \dots, n$. La función de pertenencia asociada a una variable dicotómica es la siguiente:

$$\mu_{\Xi}(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi_j = 0 \\ 0, & \text{si } \xi_j = 1 \end{cases} \quad (1)$$

donde ξ_{ij} es 0 si el individuo i no posee el bien j , y es 1 en caso contrario. En este caso, el subconjunto Ξ no es totalmente difuso como lo muestra la función de pertenencia (Miceli, 1998: 7).

Mediante la aritmética de conjuntos difusos, Belhadj propone la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_Q(x_i) = \begin{cases} 1, & 0 < x_i < z_{\min} \\ \frac{-x_i}{z_{\max} - z_{\min}} + \frac{z_{\max}}{z_{\max} - z_{\min}}, & z_{\min} \leq x_i < z_{\max} \\ 0, & x_i \geq z_{\max} \end{cases} \quad (2)$$

donde z_{\min} y z_{\max} representan los límites inferior y superior de la línea de pobreza, respectivamente. Esta media permite obtener el índice individual de privación del hogar i . Un aumento en los ingresos o gastos del hogar reduce el grado de pobreza individual y mejora las condiciones de vida (Belhadj, 2011: 6).

Otra función de pertenencia para el caso dicotómico puede obtenerse al suponer k variables categóricas X_1, X_2, \dots, X_k , las cuales pueden ser medidas para cada individuo u hogar de la población estudiada; entonces x_{ij} es la medida observada para el i -ésimo individuo ($i = 1, n$) en la j -ésima variable ($j = 1, k$) y se define:

$$\mu_E(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

donde $\xi_{ij} = 1$ si la x_{ij} indica carencia para esa variable, y $\xi_{ij} = 0$ en caso contrario.

Para las variables cualitativas se considera cierto grado de privación de los bienes. En un contexto general con m modalidades, los indicadores ξ_j pertenecen al conjunto $\{\xi_j^1, \xi_j^2, \dots, \xi_j^m\}$ ordenado de tal forma que un mayor valor del superíndice indica un peor estado de privación. Si se asocia algún puntaje $\psi_i^{(l)}$ a cada modalidad $\xi_i^{(l)}$, se tiene la relación $\psi_i^{(1)} < \dots < \psi_i^{(l)} < \dots < \psi_i^{(m)}$.

Si $\psi_j^{(\text{mín})}$ y $\psi_j^{(\text{máx})}$ son los valores máximo y mínimo, entonces la función de pertenencia es la siguiente:

$$\mu_{\Xi_j}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi_{ij} < \psi_j^{\text{mín}} \\ \frac{\psi_{ij} - \psi_j^{\text{mín}}}{\psi_j^{\text{máx}} - \psi_j^{\text{mín}}} & \text{si } \psi_j^{\text{mín}} \leq \psi_{ij} \leq \psi_j^{\text{máx}} \\ 1 & \text{si } \psi_{ij} > \psi_j^{\text{máx}} \end{cases} \quad (4)$$

donde ψ_{ij} es el valor individual de i resultante del indicador ζ_j . Con esta indicación, la función de pertenencia aumenta linealmente conforme se incrementa el riesgo de pobreza (Cerioli y Zani, 1990).

Para las variables continuas, los métodos propuestos tienen un elemento en común: en vez de establecer el mismo umbral de pobreza, determinan un intervalo que supuestamente contiene el umbral real de pobreza. Cerioli y Zani (1990) proponen la creación de dos límites: $\zeta_j^{\text{mín}}$ y $\zeta_j^{\text{máx}}$ referidos a los valores de los indicadores de pobreza escogidos para definir un umbral de pobreza absoluta por debajo (resp., por encima) del cual una persona o un hogar —sin lugar a dudas— se considera pobre (resp., sin pobreza). La función de pertenencia toma valores entre 0 y 1 y es continua y decreciente. Esta función se define por:

$$\mu_{\Xi_j}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \zeta_{ij} < \zeta_j^{\text{mín}} \\ \frac{\zeta_j^{\text{máx}} - \zeta_{ij}}{\zeta_j^{\text{máx}} - \zeta_j^{\text{mín}}} & \text{si } \zeta_{ij} \in [\zeta_j^{\text{mín}}, \zeta_j^{\text{máx}}] \\ 0 & \text{si } \zeta_{ij} > \zeta_j^{\text{máx}} \end{cases} \quad (5)$$

De este modo, se asume que el riesgo de estar en pobreza varíe linealmente entre los límites $\zeta_j^{\text{mín}}$ y $\zeta_j^{\text{máx}}$ (Cerioli y Zani, 1990).

Otra función de pertenencia para variables cualitativas politómicas es la siguiente:

$$\mu_{\Xi_j}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta_{ij} = \zeta_j^{(1)} \\ \mu_{\Xi_j}(\zeta_j^{(l-1)}) + \frac{F_j(\zeta_j^{(l)}) - F_j(\zeta_j^{(l-1)})}{1 - F_j(\zeta_j^{(l)})} & \text{si } \zeta_{ij} = \zeta_j^{(l)}, l = 2, \dots, m \end{cases} \quad (6)$$

donde $\mu_{\Xi_j}(\zeta_j^{(l-1)})$ representa el grado de pertenencia al conjunto Ξ_j de un individuo con modalidad $l-1$ para el indicador ζ_j ; F_j es la función de distribución acumulativa para la variable ζ_j , y las modalidades se clasifican por el aumento del riesgo de pobreza (Cheli, Ghellini, Lemmi y Pannuzi, 1994).

Para indicadores continuos de privación, se tienen las siguientes funciones de pertenencia:

$$\mu_{\Xi_j}(i) = F_j(\zeta_{ij}) \text{ o } \mu_{\Xi_j}(i) = 1 - F_j(\zeta_{ij}) \tag{7}$$

Depende de si un aumento en el valor del indicador ζ_j va junto con un mayor o menor riesgo de pobreza, respectivamente (Cheli et al., 1994).

Las funciones de pertenencia permiten medir el grado de pertenencia de cada individuo al conjunto de personas con alguna privación, según la medición del indicador k . A fin de evaluar el grado de pertenencia, $\mu_P(i)$, de cada individuo i al conjunto de pobreza P , deben reducirse estos indicadores a una dimensión. Para esto, se definen k conjuntos difusos Ξ_1, \dots, Ξ_k sobre el conjunto N , y debe hallarse una función h de los grados de pertenencia, μ_{Ξ_j} , que transformen tales conjuntos y proporcionen nuevos grados de pertenencia. De esta manera, se obtiene la siguiente relación:

$$\mu_P(i) = h[\mu_{\Xi_1}(i), \mu_{\Xi_2}(i), \dots, \mu_{\Xi_k}(i)] \tag{8}$$

La obtención de la función h implica de manera implícita o explícita el uso de las operaciones entre conjuntos o números difusos, teoría que se presenta en el apéndice de este artículo. La diferencia entre los métodos existentes radica en la forma en que se calcula esta función h . Una manera apropiada para definir la función h es mediante el uso de un peso promedio generalizado, por lo cual se define h mediante:

$$h_{\delta}[\mu_{\Xi_1}(i), \dots, \mu_{\Xi_k}(i)] = \left[\sum_{j=1}^k \omega_j (\mu_{\Xi_j}(i))^{\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} \tag{9}$$

donde $\delta \neq 0$ es un parámetro referido al tipo de promedio, y ω_j es el peso atribuido al indicador x_j en el proceso de agregación, con lo cual $\omega_j \geq 0, j = 1, \dots, k$, y $\sum_{j=1}^k \omega_j = 1$.

Cerioli y Zani (1990) en su trabajo “A fuzzy approach to the measurement of poverty” definen el grado de pertenencia de cada individuo al subconjunto difuso de los pobres de la siguiente manera:

$$\mu_{\Xi}(i) = \sum_{j=1}^k \omega_j \mu_{\Xi_j}(i) \tag{10}$$

donde $\omega_j = \ln(1/\bar{\mu}_{\Xi_j}) / \sum_{j=1}^k \ln(1/\bar{\mu}_{\Xi_j})$ es la especificación sugerida para los pesos y $\bar{\mu}_{\Xi_j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_{\Xi_j}(i)$ representa la proporción difusa de personas con privación

según el indicador ξ_j . Esta función asigna menor peso a las dimensiones en las cuales muchas personas resultan ser “definitivamente pobres”.

Cuando los datos se obtienen de una encuesta muestral, la función de pertenencia se define por:

$$\mu_{\Xi}^{(i)} = \frac{\sum_{j=1}^k \xi_{ij} \omega_j}{\sum_{j=1}^k \omega_j} \tag{11}$$

donde $\omega_j = \log(n / \sum_{i=1}^k \xi_{ij} n_i) \geq 0$ con $\sum_{j=1}^k \xi_{ij} n_i > 0$ y n_i es el peso adjunto a la i -ésima observación muestral extraída de la encuesta (Cerioli y Zani, 1990).

A partir de (11) se obtiene un índice de pobreza multidimensional dado por:

$$\mu_{\Xi} = \frac{\sum_{i=1}^k \mu_{\Xi}^{(i)} n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \tag{12}$$

Que consiste de un promedio ponderado de $\mu_{\Xi}^{(i)}$ (Costa y Angelis, 2008: 4). También es posible obtener un índice de pobreza unidimensional para cada atributo j :

$$\mu_{\Xi}(\Xi_j) = \frac{\sum_{i=1}^k \xi_{ij} n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \tag{13}$$

Mientras más grande sea el valor del índice de pobreza (es decir, más cercano a 1), mayor será la pobreza relativa de la población en estudio.

Cheli (1995) en su trabajo “Totally fuzzy and relative measures in dynamics context” considera una función de pertenencia como una función de distribución normalizada, elevada a alguna potencia $\alpha \geq 1$:

$$\mu_i = FM_i = (1 - F_i^{(M)})^\alpha = [(\sum_j \omega_j |y_j > y_i) / (\sum_j \omega_j |y_j > y_1)]^\alpha \tag{14}$$

donde ω_j corresponde a los pesos muestrales individuales.

Mientras más aumente el valor α , más peso se le dará al extremo más pobre de la distribución del ingreso, y, por lo tanto, mayor sensibilidad tendrá la ubicación de las personas más pobres en la distribución de ingresos.

Una versión un poco más refinada de la formulación (14) se utiliza para definir el indicador monetario difuso (FM) (Betti y Verma, 1999):

$$\mu_i = FM_i = (1 - L_i^{(M)})^\alpha = [(\sum_j \omega_j y_j |y_j > y_i) / (\sum_j \omega_j y_j |y_j > y_1)]^\alpha \tag{15}$$

donde $L_i^{(M)}$ es el valor de la curva de Lorenz de ingresos para el individuo (i), y y_i es el ingreso monetario. De este modo, $(1 - L_i^{(M)})$ representa la proporción del ingreso equivalente total recibido por todas las personas menos pobres, y toma el valor de 1 para los más pobres y 0 para los más ricos.

Una perspectiva denominada “enfoque difuso relativo e integrado” combina los puntos de vista de (14) y (15) (Betti, Cheli y Verma, 2006: 5), y viene dada por:

$$\mu_i = FM_i = (1 - F_i^{(M)})^\alpha (1 - L_i^{(M)})^\alpha = \left(\frac{\sum_{j=i+1}^k \omega_j |y_j > y_i}{\sum_{j=2}^k \omega_j |y_j > y_1} \right)^\alpha \left(\frac{\sum_{j=i+1}^k \omega_j y_j |y_j > y_i}{\sum_{j=2}^k \omega_j y_j |y_j > y_1} \right)^\alpha \tag{16}$$

donde $F_i^{(M)}$ es la función de distribución de ingresos, y ω_j es el peso muestral del individuo de rango j ($j = 1, \dots, k$). El parámetro α se estima de modo que el indicador global FM (la media ponderada de los FM_i) sea igual a la tasa de incidencia de la línea de pobreza.

De manera similar, Betti, Gagliardi y Salvucci (2014), en su trabajo “Multidimensional and fuzzy measures of poverty at regional levels in Mozambique”, proponen una medida monetaria difusa dada por la proporción del ingreso total recibido por todos los individuos más ricos que el individuo i , es decir,

$$\mu_i = FM_i = (1 - F_i^{(M)})^{\alpha-1} (1 - L_i^{(M)}) = \left(\frac{\sum_{j=i+1}^k \omega_j |y_j > y_i}{\sum_{j=2}^k \omega_j |y_j > y_1} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\sum_{j=i+1}^k \omega_j y_j |y_j > y_i}{\sum_{j=2}^k \omega_j y_j |y_j > y_1} \right) \tag{17}$$

En 2008 Betti y Verma construyeron medidas de privación al separar dominios de ingresos monetarios y no monetarios, a fin de asegurar que la pobreza de ingresos mantenga su influencia en el análisis. El indicador no monetario, FS , denominado *medida difusa suplementaria*, es:

$$\mu_i = FS_i = \frac{\sum_{\delta=1}^{\Delta} FS_i^{(\delta)}}{\Delta} \tag{18}$$

con

$$FS_i^{(\delta)} = [1 - F_i^{(\delta)}][1 - L_i^{(\delta)}] \tag{19}$$

donde $1 - F_i^{(\delta)}$ es el indicador del i -ésimo individuo que representa la proporción de individuos con menor privación en la dimensión δ ; $F_i^{(\delta)}$ es el valor de la función de distribución de puntuación evaluada para el individuo i en la

dimensión α . El indicador $1 - L_i^{(\delta)}$ es la proporción de puntuación de carencia total de privación asignada a todas las personas menos favorecidas, y $L_i^{(\delta)}$ es el valor de la curva de Lorenz de la puntuación para cada individuo (i) en la dimensión δ dada. Sus respectivas fórmulas son:

$$1 - F_i^{(\delta)} = \frac{\sum_{j=i+1}^k \omega_j |S_j > S_i|}{\sum_{j=2}^k \omega_j |S_j > S_1|} \text{ y } 1 - L_i^{(\delta)} = \frac{\sum_{j=i+1}^k \omega_j S_j |S_j > S_i|}{\sum_{j=2}^k \omega_j |S_j > S_1|}$$

donde ω_j es el peso muestral del i -ésimo individuo de rango j en la distribución de puntuación ascendente en la dimensión α . Al igual que para el indicador global FM, el indicador global FS se obtiene como la media ponderada de los FS_i .

Betti et al. (2014) definen un indicador FS para la dimensión α de privación para el i -ésimo individuo de la siguiente manera:

$$\mu_i = FS_i^{(\delta)} = (1 - F_i^{(\delta)})^{\alpha-1} (1 - L_i^{(\delta)}) \tag{20}$$

donde α se determina de manera que la tasa global de privación no monetaria (la media ponderada de cada FS_i) sea numéricamente idéntica a la tasa de incidencia calculada para la línea oficial de pobreza.

Morales-Ramos y Morales-Ramos (2008), en su trabajo “La teoría de conjuntos difusos como una opción para medir la pobreza. El caso de México”, consideran una función de pertenencia que mide cada una de las carencias para cada individuo de la población en estudio como sigue:

$$\sum_{i=1}^n \mu_A(i) = \frac{1}{\sum_{j=1}^k \omega_j} [\omega_1 \sum_{i=1}^n \zeta_{i1} + \omega_2 \sum_{i=1}^n \zeta_{i2} + \dots + \omega_k \sum_{i=1}^n \zeta_{ik}] \tag{21}$$

El siguiente paso para evaluar el grado de pobreza es definir una medida resumida para toda una población. Esto puede realizarse al construir un índice general de pobreza, si se promedian las funciones de pertenencia individuales:

$$FIP = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_p(i) \tag{22}$$

donde $FIP \in [0,1]$ representa “la proporción de individuos que pertenecen en un sentido difuso, al conjunto de pobres” (Cerlioli y Zani, 1990).

Belhadj (2011) implementa un sistema de inferencia difuso (FIS) descrito como “un proceso de inferencia basado en reglas de producción difusa o también llamado razonamiento aproximado que conecta antecedentes con consecuentes en forma sencilla usando funciones de pertenencia, operadores difusos y reglas *if-then*”.

Mediante el enfoque de la teoría de la información (IT), la autora propone el siguiente índice:

$$I_j(\mu, z) = -\frac{1}{n} \sum_{i \in Q} \log(1 - \mu_Q(x_i)) \tag{23}$$

donde $\mu_Q(x_i)$ está definida en (2). El índice general difuso para toda la población es

$$I(\mu, z) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \omega_j \sum_{i \in Q} \log(1 - \mu_Q(x_i)) \tag{24}$$

Pacheco, Del-Vecchio y Kerstenetzky (2010) consideraron un índice difuso de pobreza multidimensional, FIP, con dimensiones e índice global, según el peso de cada variable mediante

$$FIP = \mu_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij} \omega_j}{\sum_{j=1}^n \omega_j} \tag{25}$$

donde μ_i es el índice difuso multidimensional agregado del municipio i ; x_{ij} es el valor del índice difuso para el indicador j calculado para el municipio i ; ω_j corresponde al peso del indicador j , y n es el número total de municipios de cada región. El cálculo del índice difuso de pobreza se obtiene al tomar en cuenta dos situaciones: si el valor de la variable aumenta, también lo hace la pobreza, mientras que cuando el valor de la variable se incrementa, la pobreza disminuye. Ambos índices se calculan mediante

$$x_{ij} = \frac{N_j - \text{Mín}_j}{\text{Máx}_j - \text{Mín}_j} \text{ y } x_{ij} = \frac{\text{Máx}_j - N_j}{\text{Máx}_j - \text{Mín}_j}$$

Para ambos casos, N_j es el valor observado de la serie del indicador j para el municipio i , y Mín_j y Máx_j son los valores mínimo y máximo de la serie del indicador j , respectivamente (Pacheco, Del-Vecchio y Kerstenetzky, 2010).

Posteriormente, Betti, Soldi y Talev (2016) calcularon indicadores globales y grupales con base en la calidad de vida, QoL : para cada individuo i

toman la agregación sobre un conjunto de elementos de un determinado grupo $h = 1, \dots, m$, mediante una media ponderada sobre j ítems:

$$QoL_i = (\sum \omega_{hj} d_{ji}) / (\sum \omega_{hj}) \quad (26)$$

donde ω_{hj} es el peso del j -ésimo ítem en el h -ésimo grupo. Esta función convierte la categoría de los ítems al intervalo $[0,1]$ mediante: $d_{ji} = [F(c_{ji}) - F(1)] / [F(l_j) - F(1)]$, para $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$, siendo c_{ji} la categoría del ítem de j para el i -ésimo individuo; $F(c_{ji})$ es la función de acumulación correspondiente, y l_j es el mayor nivel de QoL . Un indicador global para el i -ésimo individuo lo obtienen como la media no ponderada mediante:

$$QoL_i = (\sum QoL_{hi}) / m \quad (27)$$

II. ESTUDIOS RECIENTES SOBRE MEDICIÓN MULTIDIMENSIONAL DE LA POBREZA

En esta sección presentamos los principales trabajos realizados para medir la pobreza multidimensional. La mayoría de estos estudios se ha realizado en sectores bastante vulnerables donde existen niveles muy altos de pobreza en diferentes países de América Latina, Europa, Asia y África. En todos se indica el modo en que se aplican, de manera práctica, las medidas difusas multidimensionales de pobreza recogidas en la sección I.

1. *Medición de pobreza en Europa*

Miceli (1998) presenta una medición multidimensional de pobreza en hogares de Suiza mediante información procedente de una encuesta realizada por la Oficina Federal de Estadística de Suiza en 1990, la cual incluía los informes anuales de los gastos, ingresos, condiciones de vida y características de vivienda que ocupa cada hogar. Asimismo, utiliza datos complementarios: ocupación, edad y sexo de cada miembro del hogar. El autor considera cuatro categorías de indicadores: condiciones de vivienda, posesión de bienes duraderos, ingresos disponibles equivalentes y gastos equivalentes. Los indicadores se categorizaron en dicotómicos y continuos, y las funciones de

pertenencia fueron, respectivamente, las indicadas en (1) y (5). Los resultados obtenidos muestran que el uso de distintos indicadores permite obtener una imagen más completa de las condiciones de vida, y da una imagen de pobreza más cerca a la realidad. Al comparar la pobreza entre grupos de la población definidos según la situación laboral del jefe de familia, se encontró que los grados más altos de privación se dan entre los jubilados, los desempleados y los estudiantes. De este modo, el índice difuso de pobreza demuestra ser una medida superior a la tasa de incidencia. En realidad, el índice difuso de pobreza muestra que al tomar en cuenta las condiciones de vivienda y la posesión de bienes duraderos, los agricultores presentan un bajo nivel de pobreza.

Betti y Verma (2008) presentan resultados empíricos mediante los datos de una encuesta italiana denominada “Panel de Hogares de la Comunidad Europa” para la octava oleada de 2001. Las autoras utilizan medidas monetarias difusas basadas en variables de ingresos equiparados de los hogares, definidos como el ingreso total disponible dividido entre el tamaño equiparado del hogar. Este último lo obtienen con base en un peso de 1 al primer adulto, de 0.5 a los mayores o iguales a 14 años, y de 0.3 a menores de 14 años. Los indicadores son, en su mayoría, aquellos denominados *objetivos* sobre la privación no monetaria, como la posesión de bienes e instalaciones materiales y las condiciones físicas de vida. Mediante el operador compuesto formulado a partir de las ecuaciones (18), realizan un análisis del grado de pertenencia de las personas al conjunto de pobreza o de privación, y demuestran el gran potencial de integración de los métodos difusos en la modelización y el análisis de la dinámica de la pobreza.

Costa y Angelis (2008) utilizan los datos procedentes de la Encuesta sobre Renta y la Riqueza de los Hogares (SHIW) realizada bianualmente por el Banco de Italia entre 1993 y 2006. En su estudio, los autores también consideran indicadores demográficos de vivienda, salud, educación y formación. A partir de la información proporcionada por el SHIW, elaboraron un conjunto de indicadores compuestos con base en datos individuales y de hogares: ingreso disponible equivalente; género, edad y estatus social del jefe de familia; grado educativo del jefe de familia y de la esposa; ocupación profesional; tamaño de la vivienda, número de personas mayores y situación laboral del jefe de familia, entre otros. El índice de pobreza utilizado por los autores se muestra en (12). Sus resultados concluyen que el nivel educativo del jefe de familia surge como la causa más importante de la pobreza, seguido

por el tamaño y la dimensión de la vivienda; el tercer factor es el logro educativo de la esposa, y el cuarto es la situación laboral del jefe de familia. Notaron además que, para todas las encuestas, los factores contribuyentes de los niveles de pobreza multidimensional mantienen el mismo orden. En cuanto a los índices de pobreza relacionados con indicador de los ingresos, se mantienen bastante estables en esos años, y tienen tendencia creciente. Finalmente concluyen que la menor disminución de pobreza se produjo en 2006, seguida de 2004 y 2000, mientras que el máximo grado de pobreza se produjo en 1995.

Kim (2015), mediante los datos de la Encuesta de Panel de Hogares Británicos de 2006 —realizada por el Centro de Estudios Longitudinales del Consejo de Investigación Económica y Social del Reino Unido, junto con el Instituto de Investigación Social y Económica de la Universidad de Essex—, realizó un estudio sobre el comportamiento estadístico de tres medidas multidimensionales difusas de la pobreza: totalmente difusa, TF (5), totalmente difusa y relativa, TFR (13 y $\alpha=1$) y la medida integrada difusa y relativa, IFR (15 y $\alpha=1$). La muestra representativa nacional consideró más de 5 000 hogares y más de 10 000 personas; se recolectó información sobre temas como problemas de vivienda (poco espacio, luz natural insuficiente, fugas y humedad), propiedades (autos, televisión a color, lavadora, teléfono), y frecuencia de interacciones sociales (amistades, familiares o vecinos), así como sobre variables socioeconómicas y demográficas importantes: ingresos, ahorros, empleo y salud en ambos niveles. El autor considera, en primer lugar, una tabla de estadísticas descriptivas con variables como los ingresos, la herencia, la salud, el empleo, reuniones y grupos sociales. Posteriormente, mediante estas variables de entrada, construye una segunda tabla con las medidas de pobreza donde se muestran las medidas tradicionales de pobreza; utiliza 60% de los ingresos medios como línea de pobreza. Sus conclusiones fueron que 19.7% de la muestra es pobre, en el sentido tradicional. Por otro lado, para examinar el comportamiento estadístico de la muestra, así como de las tres medidas difusas de pobreza consideradas, utilizó la simulación de Monte Carlo, a fin de generar un número de datos a partir de una distribución normal multivariable con los parámetros calculados con base en la encuesta y la función de distribución empírica de los propios datos para cada medida. Los aspectos estadísticos considerados fueron la agregación (medición del alcance de la pobreza) y la identificación (de quiénes son pobres). A fin de obtener la agregación, el autor se enfoca en la distribución de

muestras, es decir, el comportamiento de pequeñas muestras, así como el estudio de su robustez. Para la obtención de una función de identificación, en vez de utilizar una serie de valores, se centra en el cambio del número de personas que están más cerca de ser definitivamente pobres. Los resultados de la agregación indican que las tres medidas obtenidas tienen intervalos de confianza muy pequeños, así como una distribución de muestreo simétrica y de buen comportamiento, lo cual quiere decir que las tres medidas son estimaciones bastante precisas. Para muestras pequeñas, las medidas TF y TFR son bastante confiables, pero la medida IFR no lo es. En cuanto a la robustez, el autor concluyó que las tres medidas son bastante robustas, al considerar pequeños errores en la medición. Finalmente, en cuanto a la identificación, las medidas TF e IFR subestiman de manera importante el número de personas que están relativamente muy cerca de ser “definitivamente pobres”, mientras que la estimación de la medida IFR es muy consistente.

Betti, Soldi y Talev (2016) realizaron un estudio empírico basado en indicadores de calidad de vida multidimensionales difusos (FMIQL). Las autoras utilizaron datos de 2012 para Macedonia recogidos por Eurofound durante “la tercera oleada de la encuesta europea sobre calidad de vida”. A fin de determinar los aspectos de la calidad de vida (QoL), siguieron el procedimiento del Instituto de Investigación Económica y Social (ESRI) y consideraron nueve grupos: calidad de las relaciones, confianza en las personas e instituciones, acceso a servicios, calidad de servicios públicos, bienestar subjetivo, calidad del vecindario, calidad de viviendas, estándar de vida y salud. Además, proporcionaron una fórmula de errores estándar para los indicadores difusos, así como para su desagregación por variables de salida seleccionadas mediante la varianza de QoL dada por $var(QoL) = \sum_b [(1-f_b)g_b \sum_i (QoL_{bi} - QoL_b)^2]$. Donde QoL_b está dada en (26); g_b es un factor apropiado, y $(1-f_b)$ es la corrección de la población finita, generalmente cercana a 1. Sus resultados permitieron concluir que la calidad general de vida y la mayoría de los indicadores en este tema tienen un nivel suficientemente alto, mientras que la calidad de vida 2, referida a la confianza en las personas e instituciones, parece ser la peor. Los errores estándar son en general razonables, excepto para QoL_1 (calidad de las relaciones), ya que la mayoría de las variables dentro de este grupo cambia considerablemente entre los diferentes grupos sociales en Macedonia. En cuanto a los indicadores globales difusos, el análisis de QoL_1 demostró que la calidad es mayor para las personas que viven en mejores condiciones, es decir, sin problemas de alojamiento

ni ambientales. Así, el indicador compuesto vincula la percepción con los recursos y las condiciones de vida, mientras que con QoL_2 puede comprobarse que este indicador caracteriza a la sociedad del país, pues toma un valor bastante bajo. Al comparar QoL_3 con QoL_4 , concluyeron que, en general, la percepción de la calidad del acceso a los servicios diarios necesarios es mayor que la percepción de la calidad de los sistemas nacionales correspondientes (transporte público y cuidado de la salud). Finalmente, una información proporcionada por los indicadores compuestos referida a los perfiles de los grupos sociales considerados (en Macedonia, la etnicidad es clave para varias de las dinámicas del país) indica que, excepto el nivel de vida QoL_8 , los valores de los indicadores compuestos son más bajos que el promedio nacional y con este enfoque es posible identificar fácilmente los grupos sociales más vulnerables, como aquellos con bajo nivel de educación y los afectados por problemas de alojamiento.

Prieto, González y García (2016) cuantificaron el nivel de pobreza multidimensional en España y sus comunidades autónomas mediante datos proporcionados por la Encuesta de Condiciones de Vida para 2007 y 2010. Las dimensiones consideradas fueron, entre otras, empleo, salud, educación, calidad de la vivienda y del entorno, acceso a determinados bienes y servicios y nivel de renta. La ponderación de las dimensiones utilizada por los autores es la siguiente: $\omega_j = (D \cdot P_j) / (\sum_{j=1}^D P_j)$, donde D es el número total de indicadores, y P_j es la proporción de personas que no tiene carencias en ese indicador. Además de los umbrales establecidos por los organismos oficiales variables, como renta, privación material, número de desempleados en el hogar y duración del desempleo, los autores definen un segundo umbral para una nueva variable que sintetiza el número total de carencias, de modo que una persona será considerada pobre si tiene un valor por encima de ese umbral. En relación con la intensidad de pobreza, los autores consideran dos medidas: 1) el valor medio de la nueva variable y 2) la normalización de la medida anterior por el número de dimensiones (D). También consideran como medida la tasa de pobreza multidimensional ajustada presentada en Alkire y Foster (2007 y 2011). Sus resultados reflejan un empeoramiento del nivel de pobreza multidimensional en España entre 2007 y 2010, cuando pasa de 5.4 a 9%. Por término medio, el número de carencias ponderado pasó de 3.16 a 3.67, mientras que la tasa de pobreza multidimensional ajustada aumentó de 0.017 a 0.030. Este empeoramiento es provocado fundamentalmente por el deterioro de los indicadores relativos al mercado de trabajo.

Betti, Mangiavacchi y Picolli (2017) estudiaron el impacto de la inclusión en la medición de la pobreza, y de la desigualdad en la distribución de los recursos entre los integrantes de una familia. Los datos utilizados provinieron de la Encuesta de Medición del Nivel de Vida de Albania de 2012, realizada por el Instituto de Estadística de tal país. Para la estimación de la distribución intrafamiliar de los recursos, las autoras utilizan las curvas colectivas de Engel, que los dividió en cinco categorías de consumo: alimentos, ropa, vivienda, alcohol y tabaco, y otros bienes. La estimación de las curvas de Engel reveló una generalización de discriminación de género en la distribución intrafamiliar de recursos: tanto en familias con y sin hijos, las mujeres tenían en promedio acceso a 17 y 26% menos recursos que los hombres, respectivamente. Para el análisis de la pobreza utilizaron una modificación del indicador FM definido en (17), pero sustituyeron el consumo per cápita (y_i) por el intrafamiliar, denotado por $\phi_i = \hat{\phi}_{ki}$, para cada tipo de miembro del hogar k . Esta medida de pobreza es más confiable y permitió observar un incremento de pobreza de 14.3 a 16.9% en toda la población. Tales resultados fueron mayores al analizar la dimensión de género: la pobreza femenina es mucho mayor que la masculina (19.4 frente a 14.4%), por lo tanto, las mujeres tenían 35% más probabilidades de ser pobres. Este comportamiento se presentó en todas las prefecturas, pero en diversos grados, y la dicotomía urbana/rural no desempeña un papel significativo. Las autoras también obtuvieron resultados adicionales sobre pobreza infantil y rural, los cuales confirman una relevancia fuerte y persistente de la primera, mientras que la segunda se ha reducido gradual pero sustancialmente en la última década.

Ciani, Gagliardi, Ricarelli y Betti (2019) utilizaron un enfoque difuso para medir la pobreza multidimensional en 2007, 2011 y 2015. Su análisis se basó en la encuesta de Estadísticas de la Unión Europea sobre la Renta y las Condiciones de Vida (EU-SILC), que abarcó ocho países de la zona del mediterráneo: Chipre, Grecia, España, Francia, Italia, Malta, Portugal, Eslovenia y Croacia. El estudio tomó en cuenta principalmente el endeudamiento de estos países en servicios públicos, pago de hipotecas o alquileres y en préstamos de consumo, así como la incapacidad para hacer frente a los gastos inesperados. Los autores utilizaron la función de pertenencia FS descrita en (19); en el primer factor consideraron un exponente $\alpha-1$, el cual se calcula igual que para la función FM. Además, incluyeron siete dimensiones y 29 variables, entre las cuales se encuentran: estilo de vida básico (alimentación, calor de hogar, vacaciones), bienes de consumo duraderos (carros, compu-

tadoras, televisión), servicios de vivienda (baño, ducha, sanitario), situación financiera (deudas de pago), entorno (contaminación, ruido, crimen, violencia), trabajo y educación (nivel educativo, desempleo), y salud (salud general, enfermedades crónicas, necesidades de exámenes médicos o dentales). Los resultados obtenidos para los tres años de estudio permitieron a los autores enfatizar tres aspectos: 1) la tendencia a la pobreza en diferentes dimensiones se concentró en las mismas personas, lo que aumentó la intensidad de la tasa de pobreza multidimensional, en comparación con las tasas de pobreza unidimensionales; 2) los índices obtenidos para las siete dimensiones se dividieron en dos grupos con niveles de pobreza muy diferenciados, en comparación con el índice multidimensional general FS —en el primer grupo, FS1, FS5, FS6 y FS7 son índices ligeramente inferiores a FS, mientras que en FS2, FS3 y FS4 las tasas de pobreza son sensiblemente más bajas que en FS—; 3) se observó la presencia de una fuerte correlación entre la clasificación de los países mediterráneos según los índices generales y de dimensión específica de privación, en particular para las dimensiones FS1, FS3 y FS6. Respecto de la dimensión financiera (FS4), se observó que Grecia, Chipre e Italia tuvieron mayor privación financiera durante los tres años considerados, mientras que España tuvo un valor más bajo los dos primeros años, luego aumentó al valor de Italia en 2015, y el país con la mejor situación de privación financiera fue Francia. Finalmente, en general, el nivel de privación financiera aumentó con el paso de los años, excepto en Francia y Portugal, que tuvieron un nivel reducido de 2011 a 2015.

2. Medición de pobreza en África

Oyekale, Okunmadewa, Omonona y Oni (2009) realizaron un estudio de pobreza multidimensional en Nigeria. Los autores utilizaron datos recolectados en 2006 en la Encuesta Nacional sobre Indicadores Básicos de Bienestar, que adopta un diseño de muestra de conglomerados en dos etapas en cada área de gobierno local. En la primera etapa se tomaron en cuenta las áreas de enumeración (EA), demarcadas por la Comisión Nacional de Población durante el censo de población de 1991, mientras que en la segunda, las unidades de vivienda (HU). El tamaño proyectado de la muestra proyectado fue de 100 HU en cada área de gobierno local. En total, se utilizaron 77400 HU a nivel nacional, de las cuales 59567 procedían de zonas rurales. Asimismo,

los autores consideraron pesos de muestreo para cada muestra. Como indicadores, se integraron atributos de bienestar que incluyen indicadores materiales y no materiales: materiales de los techos, paredes y pisos de las viviendas; tipo de vivienda; número de habitaciones por persona; bienes materiales, como televisión, plancha eléctrica, refrigerador, radio, celulares, computadoras, etc. Los bienes no materiales considerados son servicio de agua, desagüe, servicio de recolección de residuos, etc.; condición económica como pago de rentas, colegios, servicios de salud, acceso a alimentación, subsidios, etc. Sus resultados mostraron que el índice de pobreza multidimensional de la zona rural de Nigeria es de 0.3796 y que los principales factores responsables de ello son condiciones de vivienda/saneamiento y económicas y de seguridad. Sus conclusiones indican que los problemas a resolver en estas áreas rurales son salud, transporte público, suministro de agua, comida, educación primaria y caminos rurales.

Belhadj (2011), mediante datos de la encuesta de hogares realizada por el Instituto Nacional de Estadística de Túnez en 1990 que se hizo a 7734 hogares de este país, y utilizando las ecuaciones (2) y (22), realiza una medición para comparar la pobreza de las regiones rurales con las urbanas, con base en tres indicadores de privación: economía, actividad del jefe de familia y su nivel educativo. Al tomar en cuenta el indicador económico, los intervalos de la línea de pobreza (ingresos en dinares, moneda de Túnez) varían según la región desde $z_{\min} = 172$ hasta $z_{\max} = 339$, siendo las regiones del interior y de la zona costera rural las más pobres. Sus resultados muestran que en ese año las regiones con mayor pobreza son las zonas rurales y urbanas del interior, pues sus índices de pobreza son 0.156 y 0.103, respectivamente. La media de pobreza difusa obtenida fue 0.088, y concluye que el Litoral Urbano y Gran Túnez presentan, en promedio, condiciones de vida diferentes de las demás y mejores que la media nacional. Respecto a la actividad del jefe de familia, los más afectados son los trabajadores agrícolas y no agrícolas, pues las líneas de pobreza estimadas son menores para ellos. En consecuencia, el nivel de educación es un factor de reducción de la pobreza monetaria. Finalmente, respecto al nivel educativo, las líneas de pobreza son menores para los analfabetos: varían desde 152 hasta 199, mientras que para los académicos van de 325 a 456. Asimismo, las regiones severamente afectadas son zonas rurales y urbanas del interior, así como del litoral rural.

Betti et al. (2014) consideraron el uso de medidas difusas de privación monetaria y no monetaria para realizar una medición por etapas de pobreza

multidimensional en Mozambique, a partir de los datos obtenidos de la Encuesta de Presupuestos Familiares de Mozambique 2008-2009 (IOF08), realizada por el Instituto Nacional de Estadística. En cuanto al aspecto monetario, los autores utilizaron datos sobre el consumo diario per cápita de la IOF08, incluyendo la inflación producida durante la aplicación de las encuestas, los distintos valores de la moneda del país en varios periodos del año, y diferencias espaciales en los niveles de precios entre las diversas provincias y zonas rurales/urbanas. Por otro lado, para calcular una medida para la pobreza no monetaria, se utilizó información sobre la propiedad de bienes duraderos, calidad de viviendas, estado de salud y nivel de educación. Para ambos tipos de mediciones los autores consideraron 32 indicadores básicos agrupados en seis dimensiones: 1) condiciones de vivienda; 2) bienes duraderos más comunes y asequibles; 3) bienes duraderos menos comunes y más costosos; 4) calidad de la vivienda; 5) privación relacionada con ingresos, y 6) salud y educación. Asimismo, construyeron pesos compuestos específicos con igual valor para todos los hogares de la población. Como resultado, se identificaron seis medidas complementarias difusas, una para cada dimensión: FS1, FS2, FS3, FS4, FS5, FS6, como se define en (20). Posteriormente, obtuvieron el indicador compuesto FS al asignar ponderaciones iguales a cada dimensión complementaria; parten del supuesto de que todas las dimensiones son igualmente importantes para determinar la privación complementaria. En ambas medidas (FM y FS), obtenidas mediante las fórmulas (17) y (20), su media es igual a la tasa de incidencia oficial. Como conclusión, se obtuvo que el factor con mayor nivel de privación fue FS3=0.75, que corresponde a los bienes caros y duraderos. Por otro lado, el valor de privación de bienes duraderos menos costosos (FS2) es menor, lo que demuestra que algunos bienes duraderos —especialmente teléfonos móviles y bicicletas— son cada vez más comunes en el país. El nivel de privación para condiciones de vivienda (FS1) también es alto, con 0.53, lo cual refleja que muchos hogares carecen de instalaciones básicas en sus viviendas. La privación relacionada con los ingresos FS5 resultó ser relativamente baja (0.12), debido a que la mayoría tenía un trabajo (formal o informal). Finalmente, los resultados para salud y educación (FS6) muestran que ambos aspectos están mejorando en Mozambique, a pesar de que el valor medio de privación para esta dimensión es relativamente bajo (0.32). Ello se ve afectado probablemente por el bajo nivel de privación originado por enfermedades crónicas y el analfabetismo.

3. Medición de pobreza en América

Morales-Ramos y Morales-Ramos (2008) utilizan la función de pertenencia (21) y los resultados de índices de marginación calculados por el Consejo Nacional de Población (Conapo) del 2000 para medir la pobreza en México. Primero calculan el índice difuso de pobreza; posteriormente lo agrupan en cinco categorías de pobreza mediante la técnica de Dalenius: muy baja, baja, media, alta y muy alta. Entre las variables utilizadas se encuentran las condiciones de vivienda (sin drenaje ni servicio sanitario, sin energía eléctrica, sin agua entubada, con hacinamiento, con piso de tierra) y las condiciones de población (sin primaria completa, menos de 5 000 habitantes y hasta con dos salarios mínimos). Algunos de sus resultados, a nivel estatal, son: el Distrito Federal (Ciudad de México) es menos pobre que Chiapas, y el estado con el más bajo índice de pobreza es el de Baja California. A nivel municipal, sus resultados muestran que el municipio con menos carencia es Benito Juárez y el segundo es San Pedro Garza García. A partir de estos resultados infieren que la técnica de los conjuntos difusos es una buena opción para medir la pobreza en diferentes niveles regionales, así como para establecer comparaciones dentro de cada nivel.

Morales-Ramos (2009) utiliza la teoría de conjuntos difusos para estimar la pobreza en México para 1994-2006, mediante datos de la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) de 1994, 1996, 1998, 2000, 2002, 2004 y 2006. A fin de medir la pobreza multidimensional, el autor utilizó dimensiones de pobreza monetaria y no monetaria; esta última la divide en dos: privada y pública. La primera incluye carencia de bienes que se adquieren de manera privada con los ingresos del hogar: material de la vivienda, servicio sanitario, combustible para cocinar, teléfono, vehículo, aparatos de sonido, televisión, computadora, etc. El segundo tipo de pobreza no monetaria incluye la carencia de bienes que no pueden adquirirse de manera privada, sino mediante gasto público: servicio de agua y desagua, servicio de recolección de basura, energía eléctrica, etc. Posteriormente, construyó tres tipos de conjuntos difusos de pobreza —uno para cada dimensión—, y luego elaboró una función de pertenencia conjunta. Para la medición de la pobreza monetaria utilizó la función de pertenencia descrita en (17) para cada año mencionado. Para cada una de las dimensiones no monetarias, primero calculó los ponderadores adecuados a las características

de las variables de estas dimensiones según lo propuesto en Betti y Verma (1999). Más adelante, calculó la función de pertenencia de cada individuo en la muestra según el tipo de pobreza mediante la ecuación (17). Además, el autor clasificó la pobreza en dos tipos: manifiesta y latente. La primera es la propensión a la que se presentan las tres dimensiones de pobreza, mientras que la pobreza latente es la propensión a sufrir ya sea uno o dos de los tres tipos de pobreza. Sus resultados permiten concluir que la pobreza en México ha disminuido de 1994 a 2006, pero esa evolución ha variado de acuerdo con la zona y el tipo de pobreza analizados. En términos generales, la pobreza rural es mucho más profunda que la urbana, y en ambas predomina la dimensión monetaria. La pobreza rural presenta altos niveles en las tres dimensiones, mientras que la urbana ha sido más sensible a la crisis económica de 1994. En las zonas rurales de mayor pobreza hubo una recuperación para el 2000, que se mantuvo constante hasta 2004. En estas mismas zonas se sufre la pobreza más profunda, pues, a pesar de haber disminuido hasta niveles cercanos a 10% en 2006, ha llegado a niveles de 28%, mientras que en las zonas urbanas sólo se alcanza alrededor de 1.3% y su máximo durante el periodo de análisis fue de poco más de 6 por ciento.

Castro et al. (2010) presentan un enfoque multidimensional no difuso de pobreza. Mediante datos de Perú de 2004 a 2008, los autores eligen seis dimensiones —así como sus respectivos indicadores—: nutrición, educación, salud, condiciones de vivienda, ingresos monetarios y vulnerabilidad. Después de seleccionar las dimensiones, los indicadores y los valores de corte, construyeron el recuento multidimensional de pobreza propuesto en Alkire y Foster (2007 y 2011), y aplicaron el marco de comparación con datos para los años mencionados. Sus resultados indican que existe un gran riesgo de clasificar como individuos no pobres a quienes sufren de privaciones significativas, si consideramos solamente la dimensión monetaria unidimensional. Esto quiere decir que para cuantificar el nivel pobreza no basta utilizar sólo métodos unidimensionales, sino que se necesita construir indicadores multidimensionales capaces de medir la pobreza en todas sus dimensiones: acceso a servicios y bienes básicos, participación política, mejoras educativas, seguridad ciudadana, condiciones laborales, así como las dimensiones de naturaleza subjetiva, como culturales y psicológicas, que determinan la percepción de la propia pobreza.

Clausen y Flor (2014) proponen siete dimensiones centrales para indicar las privaciones que definen a una persona como pobre: condiciones de vida,

educación, ciudadanía, participación en la sociedad, seguridad y control, empleo y autonomía, y hábitat humano. Los autores implementan una medida de pobreza humana multidimensional para Perú basada en el enfoque de las capacidades y desde el punto de vista de la implementación empírica de la metodología de Alkire y Foster (2007). En su enfoque buscaron una medida construida con base en las privaciones en dimensiones en vez de en el uso de indicadores, para ello incorporaron un tercer conjunto de puntos de corte: los intradimensionales, los cuales definen el porcentaje (o el número) de indicadores de la dimensión j , que deben mostrar carencias antes de que dicha dimensión pueda considerarse privada. Los resultados indican una combinación de resultados favorables con algunos no tan favorables: por un lado, la reducción de la pobreza multidimensional ha sido bastante marcada al considerar grados de privaciones más altos. Ésta ha sido más notoria en las zonas rurales que en las urbanas. Por otro lado, a nivel geográfico, hay una marcada desigualdad en términos de prevalencia de privaciones. En este sentido, la región noreste del país, en particular el departamento de Loreto, se encuentra entre las más afectadas por las privaciones, y ha tenido un menor progreso en su intento por reducir estas privaciones.

Golgher (2015) realizó una comparación de la pobreza por ingresos con niveles de privación en ciudades urbanas de Brasil desde una perspectiva multidimensional, a partir de los datos de la Encuesta Brasileña de Presupuestos Familiares (POF). El autor utilizó el método del análisis de componentes principales (PCA) a fin de obtener distintas dimensiones de privación, entre las cuales se encuentran infraestructura del hogar, niveles educativos, pavimentación de pistas, activos en los hogares (vehículos, computadoras, televisión a color, refrigeradora, licuadora, plancha, ventilador), vivienda, infraestructura pública, alimentación, problemas de pago (alquiler y servicios). A fin de realizar esta comparación, el autor define tres umbrales para un rango de ingresos per cápita de hogares. El primero es la línea de pobreza, que equivale a tres cuartos del salario mínimo brasileño (SMB, 200 reales en 2003), el segundo a tres medios del SMB y el tercero a tres SMB. Estos umbrales definieron cuatro grupos de rangos de ingresos: más bajos (1, 2 y 3), medio bajos (4 y 5), medio altos (6 y 7) y altos (8, 9 y 10). Para tales umbrales las proporciones de individuos por debajo de estas líneas fueron de 15.1% para el primer umbral, y de 38.3 y 66.1%, respectivamente, para los otros dos umbrales. A partir de estos datos, el autor obtuvo las medidas de privación para las dimen-

siones establecidas a partir de valores medios de privación. A fin de definir quiénes sufren de privación en cada dimensión específica, el autor utiliza una función logística transformada como función de pertenencia: $f(x) = A - B / (1 + b e^{-ax})$, donde los valores de A y B son escogidos de modo que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. De esta manera, todos los valores de f están en $[0, 1]$. Se utilizaron los valores de pobreza por ingresos para estimar los valores de los parámetros a y b , lo que generó la misma cantidad total de privación para cada dimensión. La proporción de hogares pobres utilizada fue 15.1%, a fin de comparar esta pobreza de ingresos con las dimensiones de privación que diferencian los rangos de bajos ingresos. Luego, aplicó el mismo procedimiento para comparar los valores obtenidos para los umbrales de ingresos intermedios y superiores, 38.3 y 66.1%, con las dimensiones de privación que diferencian los rangos de ingresos medios y altos. Para las otras dimensiones, utilizó el valor de pertenencia dado por la ecuación anterior. Como resultado de esta medición, se observó una relación decreciente entre los niveles de privación y los ingresos en todas las dimensiones, lo que indica una correlación positiva, aunque imperfecta. Sin embargo, hasta para rangos de ingresos más altos, se observaron algunas privaciones, incluso en las dimensiones de los bienes comunes y alimentos. Además, algunos hogares con niveles de ingresos muy bajos pudieron superar la mayor parte de la privación de estos tipos de bienes. En conclusión, la comparación entre los ingresos y las diferentes dimensiones de privación muestra que algunos hogares de bajos ingresos no se enfrentaban a la privación en muchos aspectos, mientras que algunos hogares de ingresos más altos expresaban una alta proporción de privación de ciertos elementos.

Ottoneli y Mariano (2014) midieron la pobreza multidimensional en los municipios de la Región Noreste de Brasil a partir de datos del Censo Demográfico de 2010 (Instituto Brasileño de Geografía y Estadística). En su trabajo utilizaron 19 indicadores distribuidos en cuatro dimensiones: educación, salud, condiciones habitacionales e ingresos. Los resultados indicaron que existía pobreza, principalmente en las dimensiones de ingreso y educación, para los estados de Maranhão, Alagoas, Piauí, Pernambuco, Sergipe y Paraíba. En cuanto a la dimensión de educación, se midió por siete indicadores para obtener información sobre el nivel de alfabetización general y el acceso a la educación básica y superior. La dimensión de salud investigó el acceso a servicios de saneamiento básico, mortalidad infantil y embarazo precoz. La dimensión de condiciones habitacionales verificó las condiciones mínimas

de habitaciones de los domicilios. Finalmente, la dimensión de ingresos consideró el valor del ingreso mensual del hogar, así como el acceso a por lo menos a medio salario mínimo. Con los indicadores mencionados, los autores calcularon el índice difuso de pobreza multidimensional definido en (25), y consideraron pesos que permiten saber qué indicadores y dimensiones tienen mayor impacto en la pobreza. De este modo, la dimensión de ingresos tuvo el mayor peso, con 1.38%, mientras que las dimensiones de educación, salud y condiciones habitacionales tuvieron 1.04, 0.86 y 0.36%, respectivamente. En cuanto a educación, los resultados mostraron que los municipios con mayor propensión a situación de pobreza se ubican en los estados de Maranhão, Piauí, Alagoas y Sergipe, con un FIP cercano a 1, y los municipios con una menor propensión, en Ceará, Rio Grande do Norte y Bahía, con FIP cerca de 0. En cuanto a la dimensión de salud, los municipios con mayor propensión a la pobreza se ubican en los estados de Maranhão, Piauí, Bahía, Ceará y Alagoas, cuyo FIP es mayor a 0.66, mientras que los municipios con menor propensión se encuentran en Pernambuco, Rio Grande do Norte, Paraíba y el sur de Bahía, con un FIP menor de 0.33. Los resultados para la dimensión de condiciones habitacionales indicaron que los municipios con mayor propensión a la pobreza se ubican en Maranhão y Piauí, con FIP mayor de 0.51, mientras que los de menor propensión están ubicados en Rio Grande do Norte, Paraíba, Sergipe, Pernambuco, Alagoas y Bahía, cuyo FIP está por debajo de 0.22. Finalmente, los resultados para la dimensión de ingresos mostraron valores altos del índice de pobreza en la mayoría de los municipios de la región noreste, especialmente en los estados de Paraíba, Alagoas, Sergipe, este de Rio Grande do Norte y Pernambuco, parte de Ceará, Piauí, Maranhão y Bahía. Una vez calculado el FIP para cada dimensión, los autores finalmente calcularon uno global; concluyeron que la mayor propensión a la pobreza se encuentra en los municipios de Maranhão, Piauí y Ceará, con FIP mayor de 0.68, mientras que la menor propensión, en los municipios de Rio Grande do Norte, Pernambuco y el sur de Bahía, con FIP menor de 0.47.

Todeschini y Bezerra (2015) consideraron el indicador de pobreza multidimensional (14) y el unidimensional (13) para las regiones metropolitanas brasileñas de Belém, Fortaleza, Recife, Salvador, Belo Horizonte, Río de Janeiro, São Paulo, Curitiba, Porto Alegre y Brasilia, mediante datos de la Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) de 2011. Las autoras definieron tres dimensiones de pobreza: ingresos domiciliarios per cápita,

nivel de escolaridad domiciliar e infraestructura domiciliar. El atributo de ingresos domiciliarios lo definieron al dividir el ingreso total entre el número de personas del hogar. El nivel de escolaridad es evaluado por la media del nivel educacional de los habitantes con base en la escolaridad mínima requerida, medida en años de estudio para un determinado rango de edades. En cuanto a la estructura familiar, las autoras consideraron las siguientes variables: existencia de baños, forma de abastecimiento de agua, recolección de basura y existencia de luz eléctrica. El indicador de pobreza multidimensional fue de 0.094, mientras que los grados de pobreza unidimensionales de cada atributo fueron de 0.152, 0.445 y 0.010, respectivamente. Estos resultados mostraron que la escolaridad presentó el mayor número de pobres, seguida de los ingresos y luego la infraestructura. Las regiones metropolitanas que tuvieron un indicador de pobreza menor que el global de 0.094 fueron Porto Alegre con 0.057, Curitiba con 0.069, Belo Horizonte con 0.077, São Paulo con 0.085, Brasilia con 0.090 y Río de Janeiro con 0.092, lo cual significa que el resto de las regiones metropolitanas es más pobre que la media de Brasil, que se localiza en el norte y noreste: Recife (0.135), Fortaleza (0.124), Belém (0.119) y Salvador (0.113).

Bedoya y Galvis (2015), mediante las funciones de pertenencia (4) y (5), así como el índice de pobreza promedio (22), realizaron un análisis de la pobreza en Antioquía, Colombia. Utilizaron la encuesta de calidad de vida realizada por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) de 2012. A fin de calcular el índice difuso de pobreza, utilizaron 15 indicadores reunidos en cinco dimensiones: condiciones educativas, trabajo, salud, servicios públicos y condiciones de vivienda, y condiciones de la niñez y la juventud. Sus resultados indican que el mayor valor de la función de privación se da en la dimensión de condiciones de trabajo, con 0.34, mientras que el menor valor, en el área de salud, con 0.03. Esta tendencia se mantiene en las zonas tanto urbanas como rurales. Además, observaron que existen menos problemas de privación en los servicios de vivienda en la zona urbana que en la rural. Para la urbana, el mayor valor de la función de privación obtenido es de 0.4, para la dimensión de trabajo, mientras que el menor valor es 0.03, en la de salud. En promedio, el valor de la función de privación para la zona urbana es 0.20, y el valor de la función para la rural es 0.30. Además, el mayor valor de la función de privación se obtuvo en la dimensión de trabajo, con 0.44, seguido por la educación, con 0.42, y luego la vivienda, con 0.40. Finalmente, los autores concluyen que la dimensión que más contribuye al

valor del índice de pobreza difuso es la de trabajo, seguida de educación, vivienda, condiciones de la niñez y salud.

4. Medición de pobreza en Asia

Pham y Mukhopadhaya (2018) utilizaron datos de 9399 hogares de la Encuesta sobre el Nivel de Vida de Hogares de Vietnam de 2012 para aplicar un enfoque difuso y relativo integrado de pobreza con las funciones (16) y (20). La información obtenida incluía diferentes aspectos de las condiciones de vida, la calidad de vivienda, la demografía de los hogares, la salud, la educación y el empleo, así como de ingresos y gastos. Los autores consideraron 21 indicadores agrupados en seis dimensiones tanto monetarias como no monetarias: educación, salud, vivienda, activos duraderos, servicios duraderos y estado económico. Sus resultados mostraron que a escala nacional no existen diferencias considerables en la pobreza no monetaria para las seis dimensiones, excepto en educación y servicios básicos. Además, los niveles medios de ingresos más altos están en línea con las tasas más bajas de privación, excepto en las de privación de salud. Existe una gran disparidad entre los grupos étnicos y los educativos, y los hogares encabezados por mujeres están menos desfavorecidos, excepto en la dimensión de bienes duraderos. En cuanto a la medida de pobreza monetaria, sus resultados mostraron que la región sudeste y la del Delta del Río Rojo están más de acuerdo con la dimensión de pobreza monetaria presentada por (16). Por el contrario, la región montañosa de Midlands y Northern Mountains, donde habita la mayoría de las minorías étnicas de Vietnam, tiene la pobreza monetaria más alta. Finalmente, la medida de pobreza no monetaria indicó que existe una ligera diferencia entre las seis regiones económicas para las unidades familiares, excepto en el Delta del Río Rojo, mientras que la región del sudeste reporta los mejores resultados en términos de pobreza monetaria, así como en la mayoría de las dimensiones no monetarias, excepto vivienda. La región del Delta del Río Rojo, en comparación con las demás, presenta la mejor situación en cuanto a las dimensiones de educación, vivienda, bienes duraderos y situación económica. Sin embargo, los valores medios del Delta del Río Rojo en la dimensión de salud son los peores de las seis regiones.

Asadi, Betti, Gagliardi y Khoshbakht (2018) propusieron un enfoque multidimensional y difuso para medir la pobreza a nivel provincial en Irán. La metodología utilizó los datos de la encuesta HBS en Irán de marzo de

2016 a marzo de 2017, para los hogares de las zonas tanto rurales como urbanas. Los autores consideraron un indicador de gastos de consumo total y siete dimensiones de pobreza no monetaria, con 29 indicadores: aspiradora, lavadora, máquina de coser, lavadora de platos, teléfono, computadora, celular, televisión, radio, electricidad, carro, moto, bicicleta, cocina, baño, tipos de combustible para calefacción, cocina y agua caliente, entre otros; cada uno con diferentes pesos según los datos obtenidos para cada variable de privación. La función de pertenencia utilizada es la medida F_S dada en (19), donde el primer factor está elevado al exponente $\alpha-1$, y éste se obtiene de igual manera que para la función F_M . Según sus resultados, el valor de F_S general varía entre 0.085 en la región de Yazd y 0.562 en Ardabil. Las regiones con mayor privación se concentran en el noroeste y el sur del país, mientras que las mejores zonas se encuentran en Irán central y la capital, Teherán. Por otro lado, los resultados individuales mostraron que las provincias con mayor privación, en todas las dimensiones, son Sistán y Baluchistán, mientras que la capital, Teherán, tiene la menor privación. Con base en la dimensión F_{S1} , las regiones de Kerman, Sistán y Baluchistán fueron las provincias menos favorecidas; sin embargo, las provincias del noroeste muestran niveles de privación tanto bajos como altos. Para la dimensión F_{S2} , Sistán y Baluchistán son las provincias menos favorecidas; Irán central y Teherán siguen siendo las zonas más favorecidas. En la dimensión F_{S3} Sistán y Baluchistán son las más necesitadas, junto con Hormozgan. En la dimensión F_{S4} la situación es diferente: las provincias del sur y del oeste son las mejores. Para la dimensión F_{S5} Sistán y Beluchistán son los menos favorecidos, mientras que Gilán y Mazandarán son los más beneficiados. En la dimensión F_{S6} el nivel de privación es generalmente muy alto para todas las regiones, excepto las provincias de Yazd y Bushehr. Finalmente, en la dimensión F_{S7} el nivel de privación es muy bajo, incluso en la mayoría de provincias del noreste.

Chen, Leu y Wang (2019) analizaron la pobreza multidimensional en la población de Taiwán a partir de múltiples bases de datos como la Encuesta Nacional de Entrevistas de Salud de 2009; el Informe de 2009 del Departamento de Estadística, Ministerio de Salud y Bienestar; el Informe de 2009 del Departamento de Estadística, del Ministerio del Interior; el Informe de 2009 de la Administración de Protección Ambiental, por el Yuan Ejecutivo (EPA), y el Informe de 2009 de las Estadísticas Nacionales. Los autores consideraron el método dado en Alkire y Foster (2007), y aplicaron una técnica

de modelado multinivel para examinar la pobreza multidimensional, así como factores multinivel. Sus estimaciones resultantes indicaron perfiles de pobreza multidimensional dispares en los cuatro distritos de Taiwán, lo cual indica que los niveles de múltiples dimensiones de privación varían entre ciudades y condados según factores de micronivel, incluyendo edad, estado socioeconómico, estado civil, ingreso familiar, y tamaño de la familia. A nivel macroeconómico, los autores observaron que el nivel de urbanización, así como la relación entre los servicios y las manufacturas guardan una correlación significativa con el nivel de pobreza multidimensional. Finalmente, el estudio presenta las implicaciones de estos hallazgos para la política contra la pobreza y ofrece sugerencias para futuras investigaciones.

III. CONCLUSIONES

Después de haber revisado los diversos métodos difusos de medición de la pobreza multidimensional y sus aplicaciones en diferentes países del mundo, se concluye lo siguiente:

Para la medición de la pobreza multidimensional, en primer lugar, se recolecta información obtenida a partir de censos o encuestas realizadas por diversos organismos gubernamentales, ya sea de manera individual o colectiva. Esta recolección de información toma en cuenta distintos indicadores, los cuales, para el método difuso, se representan mediante funciones de pertenencia. En la literatura revisada se han identificado hasta cuatro de estos tipos de funciones de pertenencia, correspondientes a las fórmulas (1), (4), (8) y (17). Estas funciones se relacionan con datos cuyas variables son dicotómicas, continuas, cualitativas y estocásticas.

En segundo lugar, se realizan distintos procedimientos de agregación en los cuales se determina el índice de pobreza para un grupo de indicadores o para un grupo de personas, obtenido mediante la combinación de la información individual a partir de la fórmula generalizada (8). Según la particularización y dependiendo del tipo de función de pertenencia, se utilizan también las fórmulas indicadas en (6), (7), (9), (11), (12), (14), (15), (16), (24), (25), (26) y (27), lo cual es una muestra de la riqueza de posibilidades que hay sobre los conjuntos difusos aplicados a la medición de la pobreza multidimensional.

En las aplicaciones particulares de medición de pobreza en diferentes contextos se utilizó predominantemente la función de pertenencia dada en

(4), cuya fórmula de agregación fue ponderada con diferentes pesos según se considere un contexto monetario o no monetario.

APÉNDICE:
LÓGICA DIFUSA

En este apéndice se hace un resumen de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos difusos desarrollada por Zadeh en 1965. Esta teoría se utiliza como herramienta fundamental para la medición de la pobreza multidimensional.

1. *Conjuntos difusos*

Con un conjunto X llamado universal, sabemos que todo subconjunto $A \subset X$ tiene asociada su función característica:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (1a)$$

Esta función tiene como rango al conjunto $\{0, 1\}$. Si se modifica ésta de modo que su rango sea $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, se obtiene un nuevo tipo de conjunto denominado *conjunto difuso*.

2. *Definición (conjunto difuso)*

Dado un conjunto universal X , se dice que A es un conjunto difuso en X si se tiene una función $\mu \rightarrow [0, 1]$, llamada función de pertenencia, que asocia a cada elemento $x \in X$ el número real $\mu_A(x) \in [0, 1]$, el cual se denomina *grado de pertenencia de x en A* . De este modo, mientras más cerca de 1 sea el valor de $\mu_A(x)$, mayor será el grado de pertenencia de x en A (Zadeh, 1965).

Entonces, podemos caracterizar todo conjunto difuso como un par ordenado $(X, \mu_A(x))$, es decir:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in X\} \quad (2a)$$

3. Operaciones entre conjuntos difusos

A continuación, presentamos las principales relaciones entre conjuntos difusos (Zadeh, 1965).

- Un conjunto difuso A es vacío, si y sólo si su función de pertenencia es idénticamente nula en X , es decir:

$$A = \emptyset \Leftrightarrow \mu_A \equiv 0 \quad (3a)$$

- Dos conjuntos difusos A y B son iguales, si y sólo si $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, para todo $x \in X$. En símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X \quad (4a)$$

- Un conjunto difuso A está incluido en un conjunto difuso B , si y sólo si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\forall x \in X$. En símbolos:

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X \quad (5a)$$

- El complemento de un conjunto difuso A , denotado por A^c , se define por:

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X \quad (6a)$$

- La unión de dos conjuntos difusos A y B es un conjunto difuso $C = A \cup B$, cuya función de pertenencia viene dada por:

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X \quad (7a)$$

- La intersección de dos conjuntos difusos A y B es un conjunto difuso $C = A \cap B$, cuya función de pertenencia viene dada por:

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X \quad (8a)$$

- La diferencia de dos conjuntos difusos A y B es un conjunto difuso $C = A - B$, cuya función de pertenencia viene dada por:

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cap B^c}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_{B^c}(x)\}, x \in X \quad (9a)$$

donde B^c es el complemento de B .

4. Aritmética difusa

A continuación, presentamos las principales operaciones aritméticas que pueden realizarse con números difusos. Previamente presentamos conceptos asociados con las operaciones con números difusos.

a. Número difuso

- Definimos el conjunto α nivel (o α -corte), A_α , de un conjunto difuso A , por:

$$A_\alpha = \{x/\mu_A(x) \geq \alpha, x \in X\} \quad (10a)$$

- Decimos que un conjunto difuso A es convexo si, dados dos puntos $x_1, x_2 \in X$, se verifica:

$$\mu_A[\delta x_1 + (1 - \delta)x_2] \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] \quad (11a)$$

donde δ es un número real en $[0, 1]$.

- Decimos que un conjunto difuso A es normal, si y sólo si el supremo de $\mu_A(x)$ en X es 1, es decir:

$$\sup_x \mu_A(x) = 1 \quad (12a)$$

- Definimos un número difuso como un conjunto difuso convexo y normalizado definido en \mathbb{R} , cuya función de pertenencia es seccionalmente continua.

b. Adición de números difusos

Dados dos números difusos A y B , puede definirse la suma $C = A + B$ de estos números de las dos formas siguientes:

Mediante α -cortes: con intervalos de confianza, los α -cortes de A y B son, respectivamente,

$$A_\alpha = [A^L_\alpha, A^U_\alpha] \text{ y } B_\alpha = [B^L_\alpha, B^U_\alpha] \tag{13a}$$

con $A^L_\alpha, A^U_\alpha, B^L_\alpha, B^U_\alpha \in \mathbb{R}$. De este modo, tenemos:

$$C_\alpha = A_\alpha (+) B_\alpha = [A^L_\alpha + B^L_\alpha, A^U_\alpha + B^U_\alpha], \alpha \in [0,1] \tag{14a}$$

Mediante convolución máx-mín: al usar esta convolución, se tiene

$$C(z) = \underset{z=x+y}{\text{máx}}\{\underset{z=x+y}{\text{mín}}[\mu_A(x), \mu_B(y)]\} \tag{15a}$$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$.

c. Sustracción de números difusos

Dados dos números difusos A y B , se define la sustracción $C=A-B$ de dos formas siguientes:

Mediante α -cortes: con α -cortes la sustracción de A y B viene dada por:

$$C_\alpha = A_\alpha (-) B_\alpha = [A^L_\alpha - B^L_\alpha, A^U_\alpha - B^U_\alpha], \alpha \in [0,1] \tag{16a}$$

Mediante convolución máx-mín: tenemos

$$\begin{aligned} C(z) &= \underset{z=x-y}{\text{máx}}\{\underset{z=x-y}{\text{mín}}[\mu_A(x), \mu_B(y)]\}, x, y, z \in \mathbb{R} \\ &= \underset{z=x-y}{\text{máx}}\{\underset{z=x-y}{\text{mín}}[\mu_A(x), \mu_B(-y)]\}, x, y, z \in \mathbb{R} \\ &= \underset{z=x-y}{\text{máx}}\{\underset{z=x-y}{\text{mín}}[\mu_A(x), \mu_{-B}(y)]\}, x, y, z \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{17a}$$

d. *Multiplicación de números difusos*

Dados dos números difusos A y B , se supone que

$$\mu_A(x) = 0, \text{ si } x < 0 \text{ y } \mu_B(y) = 0, \text{ si } y < 0 \quad (18a)$$

Así, puede definirse, como antes, la multiplicación de A y B , $C = A \bullet B$ de las siguientes maneras:

Mediante α -cortes: la multiplicación de A y B viene dada por

$$C_\alpha = A_\alpha(\bullet)B_\alpha = [A_\alpha^L \bullet B_\alpha^L, A_\alpha^U \bullet B_\alpha^U], \alpha \in [0,1] \quad (19a)$$

Mediante convolución máx-mín: para definir la multiplicación mediante convolución, primero determinamos el punto máximo, z^1 , del número difuso Z , tal que $\mu_z(z^1) = 1$. A continuación, calculamos la dispersión a la izquierda y derecha:

Dispersión hacia la izquierda de $\mu_z(z)$:

$$\mu_z(z) = \max_{xy \leq z} \{ \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \} \quad (20a)$$

Dispersión hacia la derecha de $m_z(z)$:

$$\mu_z(z) = \max_{xy \geq z} \{ \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \} \quad (21a)$$

5. *Números difusos triangulares*

Se utilizan especialmente en problemas de programación lineal posibilista. Se denotan como $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, siendo:

- a_1 y b_1 los valores centrales, es decir, tales que $\mu_A(a_1) = 1$ y $\mu_B(b_1) = 1$.
- a_2 y b_2 los valores restados a la izquierda.
- a_3 y b_3 los números sumados a la derecha.

También podemos denotar a los números difusos triangulares de la siguiente manera:

$$A=(a^m, a^p, a^o), \quad B=(b^m, b^p, b^o)$$

donde $a^m = a_1, a^p = a_1 - a_2, a^o = a_1 + a_3, b^m = b_1, b^p = b_1 - b_2, b^o = b_1 + b_3$.

En la gráfica 1A se ilustra un número difuso triangular.

6. Aritmética difusa de números triangulares

Dados dos números difusos triangulares $A=(a_1, a_2, a_3)$ y $B=(b_1, b_2, b_3)$ definimos las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de la siguiente manera:

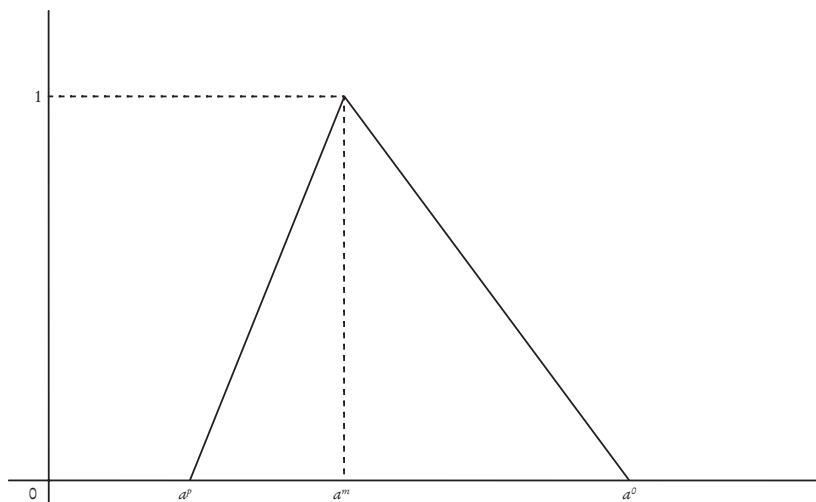
- Adición: $A(+)B=(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
- Sustracción: $A(-)B=(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.
- Multiplicación, se tienen los siguientes casos:

Si $A > 0, B > 0: A(\cdot)B=(a_1b_1, a_1b_2 + b_1a_2, a_1b_3 + b_1a_3)$.

Si $A < 0, B > 0: A(\cdot)B=(a_1b_1, b_1a_2 - a_1b_2, b_1a_3 - a_1b_3)$.

Si $A < 0, B < 0: A(\cdot)B=(a_1b_1, -a_1b_3 - b_1a_3, -a_1b_2 - b_1a_2)$.

GRÁFICA 1A. Número difuso triangular



FUENTE: elaboración propia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alkire, S., y Foster, J. (2007). *Counting and Multidimensional Poverty Measures* (OPHI Working Paper, 7). Oxford: University of Oxford.
- Alkire, S., y Foster, J. (2011). Counting and multidimensional poverty measurement. *Journal of Public Economics*, 95(7-8), 476-487. Recuperado de: <https://doi.org/10.1016/j.jpubeco.2010.11.006>
- Anderson, J. (1994). *Ni bienestar ni equidad: los fundamentos de la política social peruana*. Lima: Universidad del Pacífico.
- Asadi, A., Betti, G., Gagliardi, F., y Koshbakht, H. (2018). *Multidimensional and Fuzzy Poverty at Regional Level in Iran* (Department of Economics University of Siena, 796). Siena: University of Siena.
- Bedoya, J. G., y Galvis, J. C. (2015). Una aplicación de la teoría fuzzy al análisis de la pobreza en Antioquia. *Ensayos de Economía*, 25(47), 127-150. Recuperado de: <https://revistas.unal.edu.co/index.php/ede/article/view/56981>
- Belhadj, B. (2011). A new fuzzy unidimensional poverty index from an information theory perspective. *Empirical Economics*, 40(3), 687-704. Recuperado de: <https://doi.org/10.1007/s00181-010-0368-5>
- Betti, G., Cheli, B., y Verma, V. (2006). Multidimensional and longitudinal poverty: An integrated fuzzy approach. En A. Lemmi y G. Betti (eds.), *Fuzzy Set Approach to Multidimensional Poverty Measurement* (pp. 111-137). Nueva York: Springer.
- Betti, G., Gagliardi, F., y Salvucci, V. (2014). Multidimensional and fuzzy measures of poverty at regional levels in Mozambique. *Economy of Region*, (4), 114-128. Recuperado de: <https://doi.org/10.17059/2014-4-9>
- Betti, G., Mangiavacchi, L., y Piccoli, L. (2017). *Individual Poverty Measurement Using a Fuzzy Intrahousehold Approach* (Department of Economics University of Siena, 747). Siena: University of Siena.
- Betti, G., Soldi, R., y Talev, I. (2016). Fuzzy multidimensional indicators of quality of life: The empirical case of Macedonia. *Social Indicators Research*, 127(1), 39-53. Recuperado de: <https://doi.org/10.1007/s11205-015-0965-y>
- Betti, G., y Verma, V. (1999, 11-12 de septiembre). *Measuring the Degree of Poverty in a Dynamic and Comparative Context: A Multi-Dimensional*

- Approach Using Fuzzy Set Theory* (discurso principal). 6th International Conference on Social Sciences, Estambul.
- Betti, G., y Verma, V. (2008). Fuzzy measures of the incidence of relative poverty and deprivation: A multidimensional perspective. *Statistical Methods and Applications*, 17, 225-250. Recuperado de: <https://doi.org/10.1007/s10260-007-0062-8>
- Calvo, C. (2008). Vulnerability to multidimensional poverty: Perú, 1998-2002. *World Development*, 36(6), 1011-1020. Recuperado de: <https://doi.org/10.1016/j.worlddev.2007.10.001>
- Calvo, C., y Dercon, S. (2005). *Measuring Individual Vulnerability* (Economics Series Working Papers, 229). Oxford: University of Oxford.
- Castro, J., Baca, J., y Ocampo, J. P. (2010). (Re)counting the poor in Peru: A multidimensional approach. *Latin American Journal of Economics*, 49(1), 37-65.
- CEPAL (2013). *Panorama social de América Latina*. Santiago de Chile: ONU. Recuperado de: <https://repositorio.cepal.org/server/api/core/bitstreams/afedb833-eb4a-4ee7-8e94-ea3980aa2998/content>
- CEPAL (2014). *Panorama social de América Latina*. Santiago de Chile: ONU. Recuperado de: <https://repositorio.cepal.org/server/api/core/bitstreams/a31e1273-8437-4e66-a31a-cb3c284fc16e/content>
- CEPAL y UNICEF (2010). *Pobreza infantil en América Latina y el Caribe*. Recuperado de: <https://repositorio.cepal.org/server/api/core/bitstreams/9b920aaa-1840-471f-942f-3db8fa4faeb1/content>
- Cerioli, A., y Zani, S. (1990). A fuzzy approach to the measurement of poverty. En C. Dagum, y M. Zenga (eds.), *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty* (pp. 272-284). Berlín: Springer Verlag.
- Cheli, B. (1995). Totally fuzzy and relative measures in dynamics context. *Metron*, 53, 83-205.
- Cheli, B., Ghellini, G., Lemmi, A., y Pannuzi, N. (1994). Measuring poverty in the countries in transition via TFR method: The case of Poland in 1990-1991. *Statistics in Transition*, 1(5), 585-636.
- Chen, K. M., Leu, C. H., y Wang, T. M. (2019). Measurement and determinants of multidimensional poverty: Evidence from Taiwan. *Social Indicators Research*, 145, 459-478. Recuperado de: <https://doi.org/10.1007/s11205-019-02118-8>
- Ciani, M., Gagliardi, F., Ricarelli, S., y Betti, G. (2019). Fuzzy measures

- of multidimensional poverty in the Mediterranean area: A focus on financial dimension. *Sustainability*, 11(1), 143. Recuperado de: <https://doi.org/10.3390/su11010143>
- Clausen, J., y Flor, J. (2014). *Sobre la naturaleza multidimensional de la pobreza humana: propuesta conceptual e implementación empírica para el caso peruano* (documento de trabajo, 387). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Costa, M., y Angelis, L. de (2008). The multidimensional measurement of poverty: A fuzzy set approach. *Statistica*, 68(3/4), 303-319. Recuperado de: <https://doi.org/10.6092/issn.1973-2201/3536>
- Diniz, M. B., y Diniz, M. M. (2009). Um indicador comparativo de pobreza multidimensional a partir dos objetivos do desenvolvimento do milênio. *Economía Aplicada*, 13(3), 399-423. Recuperado de: <https://doi.org/10.1590/S1413-80502009000300003>
- Elías, L. (1994). Estudios sobre la pobreza en el Perú. En J. Chacaltana, J. Anderson, E. Chávez y L. Elías (eds.), *Pobreza y políticas sociales en el Perú* (pp. 23-74). Lima: Universidad del Pacífico.
- Golgher, A. (2015). Multidimensional poverty in urban Brazil: Income, assets and expenses. *International Journal of Social Economics*, 43(1), 19-38. Recuperado de: <https://doi.org/10.1108/IJSE-06-2013-0140>
- Iguñiz, J. (1999a). *Caminando por el borde. El Perú en la globalización*. Lima: Instituto Bartolomé de las Casas.
- Iguñiz, J. (1999b). *Desigualdad y pobreza en el mundo*. Lima: Instituto Bartolomé de las Casas.
- Kim, S. G. (2015). Fuzzy multidimensional poverty measurement: An analysis of statistical behaviors. *Social Indicators Research*, 120, 635-667. Recuperado de: <https://doi.org/10.1007/s11205-014-0616-8>
- Miceli, D. (1998). *Measuring Poverty Using Fuzzy Sets*. Canberra: Centre for Social and Economics Modelling.
- Morales-Ramos, E. (2009). *La evolución de la pobreza difusa multidimensional en México, 1994-2006* (working paper, N° 2009-04). México: Banco de México.
- Morales-Ramos, M. A., y Morales-Ramos, E. (2008). La teoría de conjuntos difusos como una opción para medir la pobreza. El caso de México. *El Trimestre Económico*, 75(299), 641-662. Recuperado de: <https://doi.org/10.20430/ete.v75i299.414>

- Ottonelli, J., y Mariano, J. L. (2014). Pobreza multidimensional nos municípios da região nordeste. *Revista de Administração Pública*, 48(5), 1253-1279. Recuperado de: <https://doi.org/10.1590/0034-76121724>
- Oyekale, O., Okunmadewa, F., Omonona, B., y Oni, O. (2009). Fuzzy set approach to multidimensional poverty decomposition in rural Nigeria. *The IUP Journal of Agricultural Economics*, 6(3-4), 7-44.
- Pacheco, K., Del-Vecchio, R., y Kerstenetzky, C. (2010). *Pobreza fuzzy multidimensional: uma análise das condições de vida na Zona Oeste do Rio de Janeiro 1991 a 2000* (texto para discussão, 30). Niteroi, Brasil: Centro de Estudos sobre Desigualdade e Desenvolvimento.
- Parodi, C. (1997). *Economía de las políticas sociales*. Lima: Universidad del Pacífico.
- Pham, A. T. Q., y Mukhopadhaya, P. (2018). Measurement of poverty in multiple dimensions: The case of Vietnam. *Social Indicators Research*, 138, 953-990. Recuperado de: <https://doi.org/10.1007/s11205-017-1691-4>
- Portocarrero, F. (2002). *Políticas sociales en el Perú: nuevos aportes*. Lima: Red para el Desarrollo de las Ciencias Sociales.
- Prieto, M., González, Y., y García, C. (2016). La pobreza en España desde una perspectiva multidimensional. *Revista de Economía Aplicada*, 70(34), 77-110.
- Ríquez, V. (1999). *Realidad Nacional* (tomo 10). Lima: Editorial San Marcos.
- Terano, T., Asai, K., y Sugeno, M. (1992). *Fuzzy Systems: Theory and its Applications*. San Diego: Academic Press.
- Todeschini, C., y Bezerra, F. M. (2015). Pobreza multidimensional no Brasil: uma análise das regiões metropolitanas. *Informe GEPEC*, 19(2), 57-71. Recuperado de: <https://doi.org/10.48075/igepec.v19i2.12818>
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353. Recuperado de: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)