El cálculo de variaciones aplicado a problemas de las ciencias sociales

*José de Jesús Gutiérrez**
*Isabel Irene Quintas***

Resumen

El presente documento esencialmente trata de ser una invitación para utilizar el cálculo de variaciones en problemas que emergen de las ciencias sociales, concretamente se presenta un problema *ad hoc* sobre la minimización de costos de una empresa que desea saber a qué tasa producir su producto en un tiempo determinado considerándose también los costos de almacenaje. En la primera parte se hace una exposición sobre la modelación matemática y métodos de optimización en general para diferentes áreas del conocimiento, modelos en tiempo continuo, discreto, en corte longitudinal y transversal, que considera variables continuas o discretas; posteriormente se plantea el problema general a resolver por el cálculo de variaciones y se presenta un bosquejo histórico de los antecedentes de esta rama de las matemáticas, algunos de sus precursores y los problemas que éstos atendieron, luego se expone una deducción formal de la ecuación de Euler que será utilizada para ilustrar su aplicación en un problema de minimización de costos considerando los costos de almacenaje en un tiempo determinado. En la parte final del documento se contrasta el resultado obtenido por medio de la ecuación de Euler contra una planeación a tasa de producción constante para diferentes costos de producción unitarios y se hace una estimación de los posibles ahorros obtenidos. La modelación matemática se presenta como un elemento que nos brinda la oportunidad de planear para la toma de decisiones con un mínimo de esfuerzo y recursos.

Palabras clave: modelación, cálculo de variaciones, minimización, costos.

Abstract

An application of variational calculus: the costs minimization. This document try to promote the use of the variational calculus in optimization problems that come out from the decisions taking in several social sciences; in this case we are going to show it in an *ad hoc* problem where it is necessary determine the rate of production

* Profesor-investigador, Departamento de Producción Económica, UAM-Xochimilco, México [jjgricb@hotmail.com].

** Profesora-investigadora, Departamento de Producción Económica, UAM-Xochimilco, México [iquintas@correo.xoc.uam.mx].

of some goods, taking into account both, the production cost and the storage fee. First, the mathematical modelling and the optimization methods are given, just for continuous or discrete time models. Then, structure of the general problem to be resolved with calculus of variations is introduced together with a brief historic outline of this branch of mathematics, some of the forefathers and the problems they addressed. The formal deduction of the Euler Equation is presented. This equation will be used to resolve the application problem. At the end, the result obtained by Euler condition is compared against the production at constant rate, and the savings.

Key words: Euler condition, modeling, calculus of variations, minimizing, costs.

Artículo recibido el 29-02-16
Apertura del proceso de dictaminación: 14-03-16
Artículo aceptado el 02-08-16

SOBRE LOS MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

Un problema de interés en muchas ciencias, tanto sociales como experimentales –economía, sociología, demografía, física, química o biología–, es el de encontrar el mejor resultado para una problemática determinada; en este sentido, se debe entender primero qué significa “el mejor resultado”, una vez establecido el criterio para esto, es posible comparar soluciones y también establecer que pueden existir varias deseables para la satisfacción de nuestros objetivos; es importante también agregar que podría ser de interés hallar las peores soluciones. En matemáticas a los métodos de modelaje que tienen el fin de hallar las mejores o peores soluciones se les denomina métodos de optimización.

Las matemáticas disponen de un conjunto de métodos que pueden ser aplicados a problemáticas en ciencias, como las mencionadas anteriormente; con ellas se modela la situación problemática y se determinan, cuando es posible, soluciones que después son interpretadas a la luz de las teorías en particular de donde provenga el problema; de esta forma, en economía se modela la preferencia de un consumidor y se determina la mejor elección de una cesta de consumo sujeto a un presupuesto, o bien, para una propuesta de política pública se determina la mejor estrategia para invitar a la población a participar en ciertos programas dado un conjunto de incentivos.

Las problemáticas que hacen uso de las técnicas de optimización pueden necesitar hacer análisis en corte transversal o longitudinal, el primero tiene que ver con la observación en tiempo fijo, por ejemplo, estudiar las características de los hogares en relación con otras variables para finales de 2015, mientras que el segundo tiene que ver con el estudio de indicadores o variables a lo largo del tiempo, por ejemplo, el comportamiento de la tasa de mortalidad en los últimos 30 años; asimismo, la modelación y su estudio se pueden realizar en los supuestos de tiempo discreto o continuo.

En ciencias sociales, los métodos estadísticos son los más conocidos, por ejemplo los de estadística multivariada como el análisis de discriminante, de conglomerados, modelación *logit* o *probit* y, sin lugar a dudas, el método más conocido es el de regresión lineal y series de tiempo; después de éstos, los métodos de modelación como los de programación lineal y no lineal, o programación dinámica cada vez están más en uso. La modelación matemática que proviene directamente del cálculo y el análisis matemático representa una fuente importante de herramientas para aplicarse en diferentes ramas del conocimiento y sus aportaciones a los métodos de optimización han enriquecido al conjunto de ópticas para las ciencias sociales como la economía y la administración.

En economía, en los problemas de elección de cestas de consumo y planes de producción que maximicen la utilidad de la sociedad, se ha utilizado a la topología y a las propiedades de ciertas funciones continuas como la Cobb-Douglas, entre otros elementos del cálculo, para establecer resultados de interés; en teoría de la empresa, la necesidad de llegar a establecer costos mínimos y utilidad máxima, o la determinación de planes óptimos de producción, reducción o ampliación de la capacidad instalada de una empresa, en un determinado periodo, ha provocado su incursión en el manejo de herramienta como la programación lineal, la programación dinámica, las condiciones de Kunh Tucker, o el cálculo de variaciones y el control óptimo.

En un planteamiento general el problema de optimización radica en encontrar un vector de x^* tal que $f(x^*) \geq f(x)$ (o también puede ser $f(x^*) \leq f(x)$ para cualquier otro vector x, sujeto a un cierto conjunto de restricciones, donde a $f(x)$ se le conoce como la función objetivo.

Ejemplo: encontrar la cesta de un consumidor que compra los bienes x, y, cuyos precios son 5 y 4 pesos, que tiene preferencias modeladas por la función de utilidad $f(x,y)=x^2y$, con un nivel de ingreso igual a 250 pesos. El problema queda planteado como

$$\begin{array}{lc} \max & f(x,y)=x^2y \\ \textit{sujeto} \quad a & 5x+4y=250 \end{array}$$

En un problema de programación lineal la función objetivo es lineal con restricciones lineales también; en un problema donde se utilicen las condiciones de Kunh-Tucker la función objetivo y las restricciones no son necesariamente lineales.

Una técnica de optimización interesante desarrollada desde el siglo XVIII es la que propone el cálculo de variaciones; un problema básico que se resuelve en este terreno es el de hallar una trayectoria $y(t)$ que maximice a la función

$$V[y] = \int_0^T F[t, y(t), y'(t)]\, dt$$

desde un punto inicial $y(0) = A$ hasta un punto final $y(T) = Z$; por ejemplo en física se está interesado en calcular la trayectoria de una partícula $y(t)$, que se dirija desde A hasta Z que maximice la energía cinética de todo el recorrido, donde esta energía se representa por $F[t, y(t), y'(t)]$, la cual depende del tiempo, la posición y la velocidad de la partícula; en economía si $y(t)$ representa al consumo de una sociedad $F[t, y(t), y'(t)]$ puede considerarse como la utilidad que se obtiene por ese consumo y se trata de maximizar la utilidad total en todo el recorrido desde A hasta Z.

El método de cálculo de variaciones en varias aplicaciones en ciencia social, se interesa por encontrar las trayectorias de consumo, inversión, gasto, costos, entre otras, en un periodo determinado que maximicen la utilidad, o la ganancia total en todo el recorrido de la trayectoria. La técnica del cálculo de variaciones aplicado en economía, la administración, o finanzas, está en la búsqueda de soluciones para la planeación; todas las técnicas de optimización para ciencias sociales son aplicadas para ayudar a la toma de decisiones.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS SOBRE EL CÁLCULO DE VARIACIONES

El cálculo de variaciones, a partir de problemas propuestos, aparece alrededor del siglo XVIII; distintos personajes interesados en el problema de maximización o minimización de funciones abordaron problemas de los campos de la física o de la naciente matemática pura con esta nueva técnica. Entre los matemáticos y físico famosos de aquella época interesados en los problemas del cálculo de variaciones encontramos a Isaac Newton (1642-1727), Leonard Euler (1707-1783), Johann Bernoulli (1667-1748) y Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Euler publicó en 1744 el *Método de búsqueda de líneas curvas con propiedades de máximo o mínimo, o la resolución del problema isoperimétrico* tomado en su sentido más amplio, considerado el primer libro en la historia sobre cálculo de variaciones.

Por otro lado, con sólo 19 años, Lagrange se interesaba por los trabajos de Euler sobre los problemas de extremos, y en particular por los problemas isoperimétricos (entre todas las curvas cerradas en el plano de perímetro fijo, ¿qué curva, si la hay, maximiza el área de la región que encierra?). Dado que los métodos de Euler para el cálculo de variaciones eran excesivamente complicados, tratándose de un tema de análisis puro, Lagrange desplaza las consideraciones geométrico-analíticas de Euler para sustituirlas por un método puramente analítico y un simbolismo más apropiado. En 1755 describe, en una carta dirigida a Euler, su método, al que llama "método de variación", pero que Euler denominará "cálculo de variaciones". Su método puede ilustrarse a partir del problema fundamental de hacer máxima o mínima la integral de un funcional que depende a su vez de una función y su derivada. El método de variaciones se aplicó, tras su descubrimiento, sobre todo en física, especialmente en mecánica, y llegó a ser una disciplina matemática independiente.[1]

En lo que respecta a las primeras aportaciones de Newton al cálculo de variaciones tenemos que, según M. Kline,[2] el primer problema importante del cálculo de variaciones fue propuesto y resuelto por Newton en el libro II de sus *Principia*, estudiando la forma que debería tener una superficie de revolución, moviéndose en el agua (o cualquier otro fluido) a velocidad constante a lo largo de su eje, para ofrecer una resistencia mínima al movimiento, se planteó el estudio de mínimos de funcionales de la forma[3]

$$\Phi(y) = \int_a^b \frac{y(t)\left(y'(t)\right)^3}{1+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

El problema de la braquistócrona, o curva de descenso más rápido, es otro de los problemas más antiguos en la historia del cálculo de variaciones. La primera solución fue dada por Johann Bernoulli en 1696, aunque también

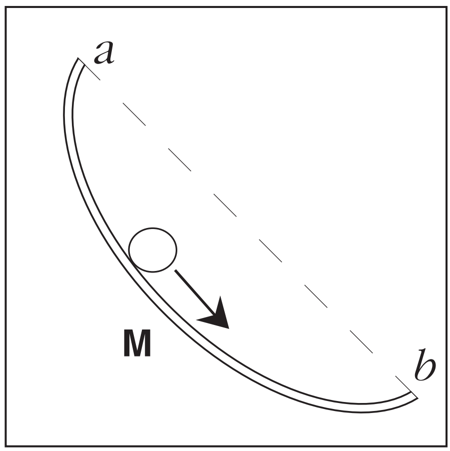
[1] José Haro y José Pérez, *Introducción al cálculo de variaciones para estudiantes de primer curso de ingenierías*, 2006, p. 1 [http://mates.albacete.org/].

[2] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Nueva York, Oxford University Press, 1972 (traducción de Alianza Editorial, Madrid, 1992).

[3] Antonio Cañada, *Cálculo de variaciones*, 2009, p. 3 [http://www.ugr.es/].

otros matemáticos y físicos dieron soluciones, entre ellos, Jacob Bernoulli, Leibniz y Newton. En 1696, Johann Bernoulli publicó una carta dirigida a los matemáticos de la época, proponiendo un problema sobre las líneas de deslizamiento más rápidas, o braquistócronas. En este problema se pide determinar la curva que une dos puntos dados "a" y "b" de tal manera que al deslizar un cuerpo por esta curva, sin fricción, el tiempo de recorrido sea el mínimo (Figura 1).

Figura 1
Braquistócrona



Actualmente el cálculo de variaciones o cálculo variacional es un campo de estudio clásico y fundamental de las matemáticas. Su desarrollo ha sido paralelo a la evolución de los conceptos centrales del análisis matemático.[4] En lo que respecta a las aplicaciones, muchos de los conceptos centrales de la física teórica, la ingeniería y actualmente también de las ciencias sociales, en particular la economía, están en estrecha relación con el cálculo variacional. Problemas como ¿cuál es la trayectoria de producción que maximiza la utilidad de un monopolista? o ¿cuál es la trayectoria que debe seguir el consumo de una sociedad para maximizar su utilidad en un periodo determinado? aparecen entre las aplicaciones más conocidas en el área económica.

[4] Luis Silva, *Cálculo de variaciones*, UNAM, 2009 [http://www.iimas.unam.mx/], fecha de consulta: 1 de julio de 2015.

LA ECUACIÓN DE EULER

El problema fundamental del cálculo de variaciones consiste en encontrar una función $y(t)$ que maximice o minimice a la función

$$V[y]=\int_0^T F\left[t, y(t), y'(t)\right] dt$$

Sujeto a

$y(0)=A$
$y(T)=Z$
con A, T, Z datos

a la función $y(t)$ que resuelve el problema se le llama función extrema y se le pide que sea continua con primera derivada continua. A la función F se le pide que tenga derivadas parciales hasta las segundas.

La ecuación de Euler es la condición básica de primer orden en el cálculo de variaciones. Supongamos una función $p(t)>0$ con $t \in (0, T)$ tal que

$$p(0)=p(T)=0$$

si y^* es la trayectoria o función extrema buscada, construyamos la función

$$y(t)=y^*(t)+\varepsilon p(t)$$

la cual genera una familia de funciones entre las cuales está la función extrema que resulta de hacer $\varepsilon = 0$.[5]

Ahora bien, se puede considerar a V como una función que depende de ε, de esta forma es posible visualizar el problema de la búsqueda de la función extrema recurriendo al cálculo tradicional proponiendo

$$\frac{dV}{d\varepsilon}=0$$

[5] Alpha C. Chiang: *Elements of Dynamic Optimization*, Mc Graw Hill, 1984; y *Métodos fundamentales de economía matemática*, Mc Graw Hill, 1984.

desarrollando esta expresión se tiene:

$$\frac{dV}{d\varepsilon}=\frac{d\left\{\int_0^T F\left[\mathrm{t},y(t),y'(t)\right]dt\right\}}{d\varepsilon}=\frac{\int_0^T F\left[t,y^*+\varepsilon p,y^*{}'+\varepsilon p'\right]dt}{d\varepsilon}$$

$$=\int_0^T \frac{\partial F}{\partial\varepsilon}dt=\int_0^T\left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{dy}\frac{dy}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{dy'}\frac{dy'}{d\varepsilon}\right)dt$$

$$=\int_0^T\left(\frac{\partial F}{dy}p+\frac{\partial F}{dy'}p'\right)dt=\int_0^T\left(F_y p+F_{y'}p'\right)dt$$

$$=\int_0^T F_y p dt+\int_0^T F_{y'}p'dt=0 \qquad (1)$$

E integrando por partes la integral del segundo sumando de (1) se tiene

$$\int_0^T F_{y'}p'dt=\left[pF_{y'}\right]_0^T-\int_0^T p\frac{dF_{y'}}{dt}dt=-\int_0^T p\frac{dF_{y'}}{dt}dt$$

Sustituyendo esto en (1) se tiene

$$\int_0^T F_y p dt-\int_0^T p\frac{dF_{y'}}{dt}dt=0$$

Esto nos dice que

$$\int_0^T p\left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dt}\right)dt = 0$$

De esta forma se tiene como condición necesaria que

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dt} = 0 \qquad (2)$$

a la cual se conoce como la ecuación de Euler.

Como

$$\frac{dF_{y'}}{dt} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial t}\frac{\partial t}{dt} + \frac{\partial F_{y'}}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_{y'}}{dy'}\frac{dy'}{dt}$$

$$= F_{ty'} + F_{yy'}y' + F_{y'y'}y''$$

La ecuación de Euler puede escribirse también como

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' + F_{ty'} - F_y = 0 \qquad (3)$$

Si se tiene una función $y(t)$ que maximiza o minimiza el funcional $V[y(t)]$ entonces se satisface la ecuación de Euler, es decir, la ecuación de Euler por sí sola no determina si se está maximizando o minimizando al funcional, en este sentido se tiene que si la función del integrando $F[t, y(t), y'(t)]$ es cóncava (convexa) entonces la ecuación de Euler se convierte en una condición suficiente para que $y(t)$ maximice (minimice) al funcional $V[y(t)]$.[6]

[6] Alpha C. Chiang, *Elements of Dynamic Optimization*, *op. cit.*, pp. 81-82.

APLICACIÓN A UN PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN DE COSTOS DE PRODUCCIÓN

Para ejemplificar el uso de la ecuación de Euler en la solución de problemas de optimización en las áreas de economía y la administración, se presenta un caso *ad hoc* de minimización de los costos de producción.[7] Se trata de una aplicación del cálculo de variaciones al problema de producción de un bien durante determinado periodo, donde se quiere minimizar el costo total, incluyendo tanto los costos de producción como los de inventario, ya que para ciertos bienes como alimentos o vacunas, los costos de almacenaje pueden ser importantes. Para esto se proponen funciones de costo y de inventario hipotéticas, que cumplan con las características generales de estas funciones: el costo de producción es una función creciente de la tasa de producción del bien, mientras que el costo de inventario depende de la cantidad ya producida y del periodo durante el que se tenga que almacenar.

Si se supone, por ejemplo, que una empresa debe entregar B unidades del bien en un periodo T, lo que se busca es encontrar el cronograma de producción en dicho periodo, para cumplir con el pedido al menor costo posible. En esta aplicación se trata de ejemplificar el procedimiento para determinar dicho cronograma utilizando el criterio que deriva de la aplicación de la ecuación de Euler.

Se asume que el costo de producir una unidad depende de la tasa de producción y es una función creciente, mientras que el costo unitario de mantener el inventario permanece constante durante el intervalo.

Se define a $x(t)$ como el inventario acumulado en el tiempo t con $x(0)=0$ (no hay existencias en el inventario al inicio del periodo) y al final del periodo T, $x(T)=B$ (aquí B representa el volumen de inventario al final del periodo).

Se establece que velocidad de cambio del inventario es igual a la tasa de producción $tp(t)$, entonces se tiene

El costo unitario de producción es una función de la tasa se producción,

$$tp(t)=\frac{dx}{dt}=x'(t)$$

ya que producir los bienes a una mayor tasa (velocidad) saldrá más costoso que hacerlo a una tasa menor, por lo tanto se trata de una función creciente:

[7] Varios problemas de este tipo se presentan en el libro de Morton I. Kamien y N.L. Schwartz, *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Dover Publications, 2012.

$$f\left(tp\left(t\right)\right)=f\left(x'\left(t\right)\right) \quad \ldots \quad (4)$$

Entonces el costo total de producción en cualquier tiempo t es la suma del costo de producción, más el costo de inventario. El costo de producción está dado por el producto del costo de producción unitario multiplicado por la cantidad producida en el intervalo, mientras que el costo de inventario es el producto del costo unitario c_2 por la cantidad producida hasta ese momento $x(t)$.

$$C\left(t\right)=\left[f\left(tp\left(t\right)\right)\right]x'\left(t\right)+c_i x\left(t\right)=\left[f\left(x'\left(t\right)\right)\right]x'\left(t\right)+c_2 x\left(t\right) \quad \ldots. \quad (5)$$

El objetivo del problema es encontrar la trayectoria de la tasa de producción $x'(t)$ y el inventario $x(t)$ que minimice el costo total de producir las B unidades en un tiempo T. Para resolverlo es necesario conocer la función de costo unitario de producción $f(tp(t))$; a modo de ejemplo vamos a suponer que la función es creciente, o sea con primera derivada positiva pero decreciente, y proponemos que la función sea proporcional a la raíz cuadrada de la tasa de producción (Gráfica 1):

$$f\left(tp\left(t\right)\right) = c_1\left[x'\left(t\right)\right]^{1/2} \quad \ldots. \quad (6)$$

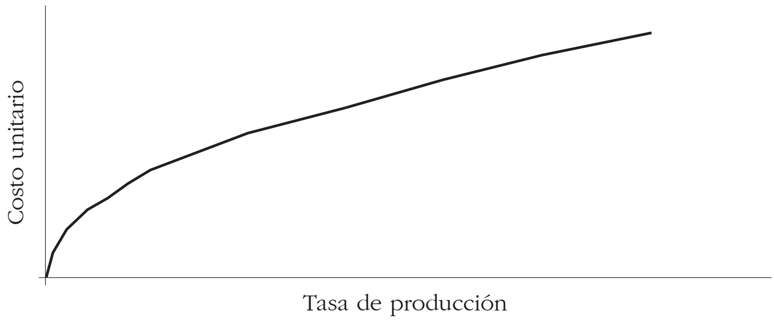
con c1 constante de proporcionalidad.

El costo total de producción en cualquier tiempo t es la suma del costo de producción, primer sumando de la siguiente expresión, más el costo de inventario, segundo sumando (véase 5), luego sustituyendo en ésta la expresión de la función de la tasa de producción descrita en (6) se tiene.

$$C\left(t\right)=\left[f\left(tp\left(t\right)\right)\right]x'\left(t\right)+c_i x\left(t\right)=\left[f\left(x'\left(t\right)\right)\right]x'\left(t\right)+c_2 x\left(t\right)$$

$$C\left(t\right)= c_1\left[x'\left(t\right)\right]^{3/2}+c_2 x\left(t\right) \quad \ldots \quad (7)$$

Gráfica 1
Costo de producción proporcional
a la raíz cuadrada de la tasa de producción



El problema se reduce entonces a encontrar la tasa de producción $x'(t)$ y el inventario $x(t)$ que minimice el costo total, esto es

$$Min\int_0^T \left\{ c_1 \left[x'(t)\right]^{3/2} + c_2 x(t) \right\} dt \qquad (8)$$

$$sujeto \quad a \quad x(0)=0 \quad x(T)=B \quad x'(t)>0$$

La forma más simple de producción es hacerlo a una tasa constante, la otra alternativa es utilizar el método del cálculo de variaciones. A continuación se presentan ambas alternativas y se compararán los resultados.

Situación 1. Un plan posible se encuentra suponiendo que la tasa de producción es constante $x'(t)=B/T$, entonces el inventario acumulado en un tiempo t queda como

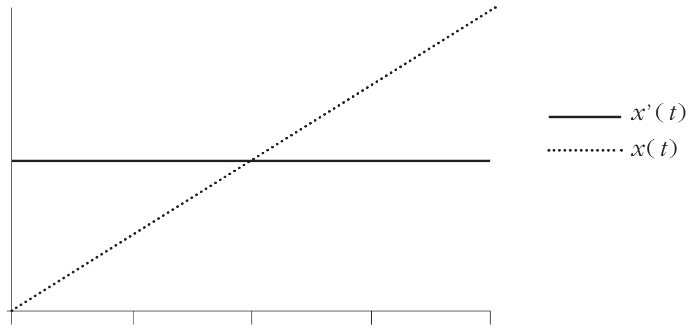
$$x(t)=\int_0^t \frac{B}{T}ds=\frac{B}{T}t \qquad (9)$$

y el costo total será

$$Costo \quad total = \int_0^T \left\{ c_1\left(\frac{B}{T}\right)^{3/2} + c_2\frac{B}{T}t \right\} dt = \left[c_1\left(\frac{B}{T}\right)^{3/2} t + c_2\left(\frac{B}{2T}\right)t^2 \right]_0^T$$

$$Costo \quad total = \frac{c_1 B^{3/2}}{T^{1/2}} + \frac{c_2 BT}{2} \qquad (10)$$

Gráfica 2
Tasa de producción constante e inventario linealmente creciente



La siguiente alternativa es encontrar una función $x'(t)$ por medio del método de cálculo de variaciones como se muestra a continuación, para luego comparar los costos que resultan con los calculados en la situación 1.

Situación 2. Para el funcional que aparece en la integral de la ecuación (8)

$$F\left(x,\, x',\, t\right) \;=\; c_1\left[x'\left(t\right)\right]^{3/2} + c_2 x\left(t\right)$$

se aplica la condición de Euler de la cual emergerá la trayectoria que minimiza el costo; lo anterior se sustenta en el hecho de que la función de la integral es convexa (como ya se mencionó en este documento).[8] De esta forma la trayectoria $x(t)$ que minimiza el costo debe satisfacer la condición establecida en (2)

$$\frac{d\left(F_{x'}\right)}{dt} = F_x$$

donde

$$F_x = c_2 \quad ; \quad F_{x'} = \frac{3}{2}c_1(x')^{1/2}$$

[8] Véase nota 6.

sustituyendo estas dos últimas expresiones en la ecuación de Euler se llega a

$$\frac{3}{4}c_1(x')^{-1/2}x'' = c_2 \qquad (11)$$

de donde resulta una ecuación diferencial no lineal.

Para integrar 11), se hace el cambio de variable $u = x'$ y $du = x''dt$; de esta forma, reordenando se tiene que

$$\int u^{-1/2}du = \int \frac{4c_2}{3c_1}dt$$

lo que se traduce en

$$2u^{1/2} = \alpha t + k \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{4c_2}{3c_1} \qquad (12)$$

o sea

$$u = \left(\frac{\alpha}{2}t + k_1\right)^2$$

Sustituyendo $u = x'$ se tiene

$$x' = \left(\frac{\alpha}{2}t + k_1\right)^2 \qquad (13)$$

Integrando nuevamente

$$x(t) = \int\left(\frac{\alpha}{2}t + k_1\right)^2 dt = \frac{2}{3\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}t + k_1\right)^3 + k_2 \qquad (14)$$

La solución contiene dos constantes de integración k_1 y k_2 las cuales se calcularan a partir de las condiciones iniciales. También aparece el parámetro α que tiene que ver con la relación entre las constantes c_2/c_1.

Utilizando la condición $x(0)=0$

$$0 = x(0) = \frac{2(k_1)^3}{3\alpha} + k_2$$

$$k_2 = -\frac{2(k_1)^3}{3\alpha} \qquad (15)$$

Así también, como $x(T)=B$

$$x(T) = B = \frac{2}{3\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}T + k_1\right)^3 - \frac{2}{3\alpha}(k_1)^3$$

$$= \frac{2}{3\alpha}\left(\frac{\alpha^3}{8}T^3 + 3\frac{\alpha^2T^2}{4}k_1 + 3\frac{\alpha T}{2}(k_1)^2 + (k_1)^3\right) - \frac{2}{3\alpha}(k_1)^3$$

$$= \frac{2}{3\alpha}\left(\frac{\alpha^3}{8}T^3 + 3\frac{\alpha^2T^2}{4}k_1 + 3\frac{\alpha T}{2}(k_1)^2\right) = \frac{\alpha^2}{12}T^3 + \frac{\alpha\, T^2}{2}k_1 + T(k_1)^2 = B$$

De la última igualdad se llega a una ecuación de segundo grado en k_1 de donde se obtiene

$$k_1 = -\frac{\alpha T}{4} + \frac{\sqrt{-\frac{\alpha^2T^4}{12} + 4BT}}{2T} \qquad (16)$$

La condición para que la solución sea un número real viene dada por

$$\frac{B}{T} \geq \frac{\alpha^2T^2}{48}$$

pero como se definió

$$\alpha = \frac{4c_2}{3c_1}$$

en la expresión (12), esta última desigualdad dependerá del costo de almacenaje y del coeficiente del costo de producción

$$\frac{B}{T} \geq \frac{T^2}{27}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2$$

La relación anterior muestra que para que exista solución es importante que la relación entre el costo de almacenaje y el coeficiente del costo de producción no supere cierto valor cuyo máximo depende de la relación entre B y T, la cantidad de unidades a producir y el tiempo para realizarlo. También se puede ver que para una dada relación, la cantidad de bienes a producir debe estar por encima de cierto nivel

$$B > \frac{T^3}{27}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2$$

Sustituyendo $x(t)$ y $x'(t)$ en (7), en términos de k_1 y k_2 e integrando, el costo total será

$$C(T) = \int_0^T \left(c_1 \left(\left(\frac{\alpha}{2} t + k_1{}^2 \right)^2 \right)^{3/2} + c_2 \left(\frac{\alpha^2 t^3}{12} + \frac{\alpha\ t^2}{2} k_1 + t k_1^2 \right) \right) dt$$

$$C(T) = \frac{c_1}{2\alpha}\left(\frac{\alpha T}{2} + k_1\right)^4 + c_2\left(\frac{\alpha^2 T^4}{48} + \frac{\alpha T^3}{6} k_1 + \frac{T^2}{2} k_1{}^2\right) - \frac{c_1}{2\alpha}\left(k_1\right)^4 \qquad (17)$$

COMPARACIÓN ENTRE COSTOS

Para evaluar ambas situaciones y poder comparar los costos totales (ecuaciones 10 y 17), la primera con una tasa de producción constante dada por $x' = B/T$ y la segunda con una tasa

$$x' = \left(\frac{\alpha}{2}t + k_1\right)^2$$

encontrada optimizando según la condición de Euler, se calcula para varios conjuntos de valores que se presentan en el siguiente cuadro, donde se comparan los costos tanto de producción como de inventario. Como los costos dependen solamente de cuatro parámetros, B: cantidad a producir, T: periodo de tiempo para la producción, c_1: coeficiente de proporcionalidad del costo de producción y c_2: costo de almacenaje unitario, para poder comparar los costos, se le asigna el mismo valor a los tres primeros parámetros y se incrementa el valor del costo de almacenaje para observar cuál es el ahorro que se logra al producir a la tasa indicada por la trayectoria óptima de Euler, respecto al costo obtenido a tasa constante. En el Cuadro 1 se muestran los costos para los mismos valores con ambos criterios.

CUADRO 1
Detalle de los costos de producción y almacenaje a tasa constante y a la tasa dada por el método de Euler, para seis casos diferentes

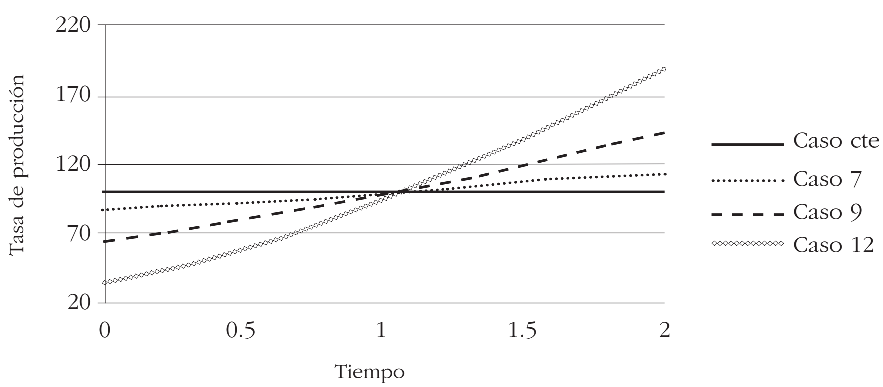
	tasa de producción	B	T	c_1	c_2	costo producción	costo inventario	costo total	ahorro %
caso 1	constante	200	2	2	2	4 000	400	4 400	
caso 2	constante	200	2	2	4	4 000	800	4 800	
caso 3	constante	200	2	2	6	4 000	1 200	5 200	
caso 4	constante	200	2	2	8	4 000	1 600	5 600	
caso 5	constante	200	2	2	10	4 000	2 000	6 000	
caso 6	constante	200	2	2	12	4 000	2 400	6 400	
caso 7	Euler	200	2	2	2	4 009	383	4 392	0.18
caso 8	Euler	200	2	2	4	4 035	729	4 764	0.75
caso 9	Euler	200	2	2	6	4 079	1 041	5 120	1.54
caso 10	Euler	200	2	2	8	4 140	1 319	5 459	2.52
caso 11	Euler	200	2	2	10	4 216	1 564	5 780	3.67
caso 12	Euler	200	2	2	12	4 307	1 777	6 084	4.94

En todos los casos se mantiene la relación $B/T = 100$ y $c_1 = 2$ Los primeros seis casos son a tasa de producción constante B/T y se observa que sólo se incrementa el costo de almacenaje al aumentar el costo unitario c_2. Los casos 7 a 12 repiten los mismos valores que los casos 1 a 6 pero la tasa de producción es variable y está dada por la solución encontrada por el método de Euler

$$x' = \left(\frac{\alpha}{2} t + k_1 \right)^2$$

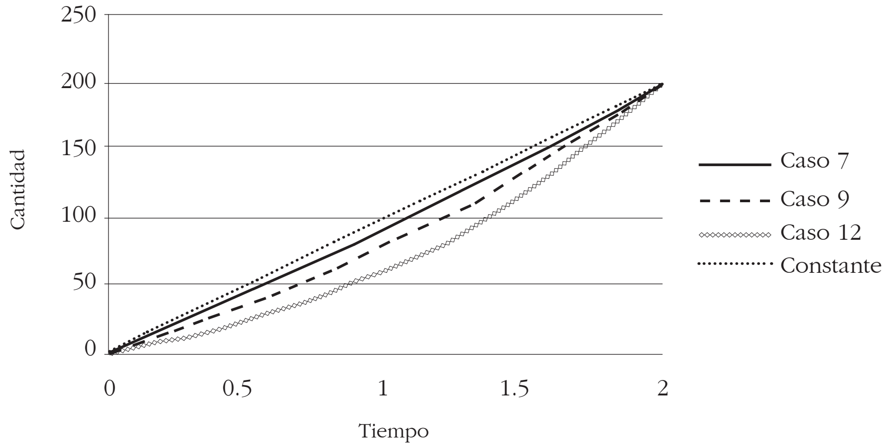
En la Gráfica 3a se puede observar el valor de la tasa de producción durante el periodo (0, T) para algunos de estos casos, mientras que en la Grafica 3b se observa el nivel de inventario para los mismos casos. En todos los casos, el costo de almacenaje es menor que si se produce a tasa constante y en todos los casos resulta en una disminución del costo de producción que aumenta a medida que crece el costo unitario de inventario. En la última columna del cuadro se muestran los porcentajes de ahorro obtenidos en cada caso al compararlo con la situación equivalente a tasa constante. Los costos totales de producción mínimos obtenidos para los distintos valores de costo de almacenaje según Euler se muestran en la Grafica 4.

Gráfica 3a
Tasa de producción para diferentes casos



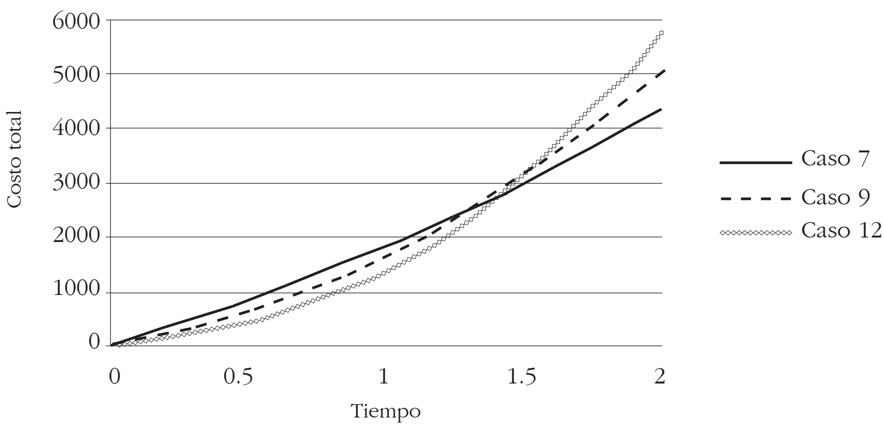
Gráfica 3b

Nivel de inventario durante el periodo de producción



Gráfica 4

Costo de producción en el tiempo, para costos de inventario de 2, 6 y 12 a tasa de producción dada por Euler



Para el caso 1, con tasa de producción constante, y con $(c_1, c_2) = (2, 2)$, el costo total es de 4 400 que corresponden a 4 000 de costos de producción más 400 de costos de almacenaje. En el caso de producir con la tasa variable obtenida, para los mismos valores $(c_1, c_2) = (2, 2)$ y

$$x' = \left(\frac{\alpha}{2} t + k_1 \right)^2$$

Caso 7, el costo total sería de 4 392, con un costo de producción de 4 009 y el costo de almacenaje se reduce a 383; se observa que aunque hay un incremento en el costo de producción, disminuye el costo de almacenaje, obteniéndose una reducción del 0.18%; pero si se incrementa el costo de almacenaje, los casos 3 y 9, en que c_1 y c_2 toman los valores 2 y 6 respectivamente, el costo total a tasa de producción constante es de 5 200 y disminuye a 5 120 utilizando la tasa calculada con la ecuación de Euler, con una disminución de 1.54%; para los casos 6 y 12 con $(c_1, c_2) = (2, 12)$ el ahorro es de 4.94%. En todos los casos se obtiene una disminución significativa del costo de almacenaje (de hasta casi 30%) aunque también se observa un incremento en el costo de producción que no sobrepasa al 10%, obteniéndose en todos los caso reducciones en el costo total de producción.

CONCLUSIONES

1. El ejemplo presentado muestra que con un procedimiento que sólo requiere los conocimientos básicos del cálculo, se pueden obtener los diferentes escenarios y a partir de éstos las trayectorias óptimas de producción dependiendo de los valores relativos de los distintos parámetros; en el caso presentado, la relación entre el costo de producción y el costo de almacenaje es el factor determinante. Para todos los casos analizados se logran economías que pueden representar la posibilidad de producir algunas decenas de miles más de vacunas con el mismo presupuesto.
2. Muchas otras aplicaciones se pueden implementar con la herramienta matemática a problemas que provengan de las ciencias sociales. Se tiene en general cierto grado de desconocimiento acerca de la forma en la que se pueden construir modelos que permitan, de una manera económica, plantear escenarios con posibles soluciones que se constituyan como elementos para la crítica, propiciando con esto el mejoramiento de la propia modelación y también la invitación a la reflexión teórica en la ciencia social donde se esté llevando a cabo la aplicación.
3. Los modelos de cálculo de variaciones llevan implícito el carácter dinámico al incorporar, en su función a maximizar, tanto a la trayectoria que se busca como a la forma en la que esta trayectoria cambia. En nuestro problema de aplicación nos propusimos encontrar la trayectoria de un inventario haciendo consideraciones acerca de cómo cambia el inventario a través del tiempo y entonces como debe variar la tasa de producción.