Los procesos de ramificación como instrumentos para el estudio de la fecundidad humana

Manuel Ordorica

El Colegio de México

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar un análisis de los cambios de la fecundidad observados en México a través de la Teoría de la Ramificación, desarrollada por Galton y Watson a finales del siglo XIX. Con esta técnica es posible calcular la probabilidad de extinción de una descendencia.

Esta metodología estadística basada en el cálculo de probabilidades permite utilizar indicadores de la fecundidad derivados de los censos de población, según el orden de nacimiento, lo cual permite hacer un análisis diferente de esta variable al realizado hasta la fecha en nuestro país. Es posible analizar a qué número de hijas e hijos está tendiendo la población mexicana.

Abstract

The purpose of this article is to analyze the change in the levels of fertility in Mexico through Branching Theory, developed by Galton and Watson at the end of the nineteenth century. With this technique it is possible to calculate the probability of extinction of a descendence.

This statistical methodology based on the calculus of probability allows using indicators from population's censuses the estimation of fertility levels according to order of birth. This allows making a different analysis from this variable to the one carried out so far in our country. It is possible to analyze what number of daughters and sons the mexican population is tending to have.

Introducción

La fecundidad humana puede ser estudiada a través de un proceso estocástico llamado "Teoría de la Ramificación". El proceso puede ser descrito de la siguiente manera: se supone que inicia con un individuo que formaría la generación cero o generación original. Este individuo tiene probabilidad p_k de producir k nuevos individuos en la siguiente generación. En el caso de que k sea igual a cero podríamos decir que la especie se extinguió. Cuando k es igual a 1 podemos señalar que nació un nuevo individuo. Los valores superiores de k significan la aparición de nuevos individuos. Los individuos de cada generación actúan en forma independiente una de otra.

Existen varios ejemplos que permiten ilustrar el campo de aplicación de esta teoría. En la física nuclear los procesos de ramificación ocurren en las reacciones en cadena. La aplicación se ha conocido a partir de la bomba atómica. Se presentan choques fortuitos entre partículas. Estos choques pueden producir nuevas partículas o no producir descendencia. En biología son posibles las aplicaciones para estudiar las mutaciones genéticas. En el análisis de las líneas de espera, es posible señalar como un cliente que llega a una gasolinería vacía recibe atención, y se le dé el nombre de antepasado, su descendencia la conforman los coches que llegan al lugar durante el período que lo atienden.

Se ha estudiado también la aplicación en la supervivencia de apellidos. Solamente se incluyen descendientes masculinos o femeninos quienes desempeñan el papel de partículas y p_k es la probabilidad de que un recién nacido se convierta en padre de *k* niños varones. En este caso, es de interés encontrar individuos con el mismo apellido en la *n-ésima* generación. En particular resulta de especial importancia conocer la probabilidad de que se extinga la generación.

Este instrumento estadístico permite utilizar indicadores de la fecundidad según orden de nacimiento, lo cual podría posibilitar un análisis diferente de esta variable al realizado hasta ahora.

Son varios los autores que han aplicado la Teoría de la Ramificación al campo de la Demografía. Tenemos primeramente a Galton y Watson (1874), Lotka (1931), Harris (1963) y Keyfitz (1979), entre otros.

Metodología

Sea ξ la variable aleatoria que indica el número de hijas que ha tenido una mujer antes de su muerte.

$\Pi_0 = P_r(\xi = 0)$; es la probabilidad de que una mujer haya tenido 0 hijas.

$\Pi_1 = P_r(\xi = 1)$; es la probabilidad de que haya tenido una única hija.

$\Pi_2 = P_r(\xi = 2)$; probabilidad de que haya tenido exactamente 2 hijas antes de su muerte.

en general.

$\Pi_r = P_r(\xi = r)$; es la probabilidad de que haya tenido exactamente *r* hijas.

Se deduce que

$$P_r(\xi = 0) + P_r(\xi = 1) + \ldots\ldots + P_r(\xi = \omega) = \sum_{i=0}^{\omega} P(\xi = i) = 1$$

Con base en las probabilidades antes definidas podemos calcular la probabilidad para las nietas. La probabilidad de cero Π_0 nietas es más la probabilidad de que una mujer tenga una hija que a su vez no tuvo hijas, Π_1, Π_0, más la probabilidad de que una mujer que tuvo 2 hijas, éstas a su vez no tengan hijas, Π_2, Π_0^2, ... Este proceso se puede repetir para bisnietos y para las siguientes generaciones. Los supuestos que están detrás sostienen que la fecundidad ha permanecido constante entre generaciones y la independencia entre eventos. La ley de fecundidad de las madres, es igual a la de las hijas, igual a la de las nietas, etcétera..

El recurso usado por Watson para resolver el problema de Galton fue construir una función generatriz de probabilidad.

Sea la función:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k s^k$$

A esta función se le denomina función generatriz de probabilidad de la sucesión de valores $\{\Pi_k\}$, siempre y cuando converja en algún intervalo real $-s_0 \langle s \langle s_0$.

Si la sucesión de valores $\{\Pi_k\}$ está acotada entonces f (s) converge.

Se sabe que

$$\Pi_k \geq 0 \qquad y \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k = 1$$

La función generatriz tiene algunas propiedades:

1) $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k = 1$

2) $f(0) = \Pi_0$

Tenemos que:

$$f(s) = \Pi_0 s^0 + \Pi_1 s^1 + \Pi_2 s^2 + ...$$

$$f(s) = \Pi_0 + \Pi_1 s + \Pi_2 s^2 + ...$$

Por lo tanto:

$f(0)=\Pi_0$ es la probabilidad de que una mujer tenga 0 hijas antes de su muerte.

3) $f'(1)=\sum_{k=0}^{\infty} k\Pi_k$

Tenemos que:

$$f(s)=\Pi_0+\Pi_1 s+\Pi_2 s^2+\Pi_3 s^3+.....$$
$$f'(s)=\Pi_1+2\Pi_2 s+3\Pi_3 s^2+......$$
$$f'(s)=\Pi_1+2\Pi_2+3\Pi_3+.....$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty} k\Pi_k$$

f' (1) significa la derivada de la función f (s) evaluada en el punto 1. Como se puede observar es el número medio de hijas de las mujeres consideradas.

4) $f''(1)+f'(1)-(f'(1))^2$

$$f'(s)=\sum_{0}^{\infty} k\Pi_k s^k$$

Se tiene que: $$f''(s)=\sum_{0}^{\infty} k(k-1)\Pi_k s^{k-2}$$

$$f''(1)=\sum_{0}^{\infty} k(k-1)\Pi_k$$

Ahora

$$f'(1)=\sum_{0}^{\infty} k\Pi_k$$

Tenemos que:

$$f''(1)+f'(1)-(f'(1))^2=\sum_{0}^{\infty} k(k-1)\Pi_k+\sum_{0}^{\infty} k\Pi-(\sum_{0}^{\infty} k\Pi_k)^2$$
$$=\sum_{0}^{\infty} k^2\Pi_k-(k\Pi_k)^2$$

Este es el segundo momento con respecto al origen menos el primer momento elevado al cuadrado. A esto se le denomina la varianza para el número de hijas de las mujeres consideradas.

$$Var(x) = E(x - E(x))^2 = E(x^2) + E^2(x) - 2E^2(x)$$
$$= E(x^2) - E^2(x)$$

5) El coeficiente de s^w en la serie $f(s)$ nos indica la probabilidad de que una mujer tenga w hijas.
6) El coeficiente de s^w en la serie $(f(s))^r$ nos indica la probabilidad de que r mujeres tengan a lo largo de su vida w hijas.

En el supuesto de que r sea igual a dos y n sea igual a dos tenemos lo siguiente:

$$(f(s))^2 = (\Pi_0 + \Pi_1 s + \Pi_2 s^2 + ...)^2$$
$$= \Pi_0^2 + 2\Pi_0\Pi_1 s + (\Pi_0\Pi_2 + \Pi_2\Pi_0 + \Pi_1^2)s^2 + ...$$

El coeficiente $\Pi_0 \Pi_2 + \Pi_2 \Pi_0 + \Pi_1^2$ es la probabilidad de que de dos mujeres, la primera tenga cero hijas y la segunda tenga 2 hijas, más la probabilidad de que la segunda tenga cero hijas y la primera dos, más la probabilidad de que las dos tengan una hija cada una.

El proceso de ramificación tiene sus raíces en la discusión de Francis Galton sobre la decadencia de las familias de hombres que ocuparon lugares importantes en la historia.

La probabilidad de extinción en la primera generación es Π_0 o $f(0)$. En la segunda generación es $f(f(0))$, en la tercera generación es $f(f(f(0)))$ y en la enésima generación es $f(f(...f(0))) = f_n(0)$.

Para determinar $f_{n+1}(0)$ cuando n tiende a infinito, se reconoce que en el límite $f_n(0) = f(f_n(0))$, lo que nos lleva a calcular $x = f(x)$ (Keyfitz, 1979).

Forma de cálculo de la probabilidad de extinción

La probabilidad de extinción en la primera generación es $f_n(0)$, es decir, el valor de la función generatriz evaluada en el punto 0. En la segunda generación es $f(f(0)) = f_2(0)$ y en la *enésima* generación es $f_n(0)$. Al analizar $f_{n+1}(s)$ a partir de $f_n(s)$ se observa que el término $f_n(0)$ aumenta con n, pero nunca puede disminuir, ya que $f_n(0)$ es una sucesión monótona no decreciente. Otro aspecto que es importante mencionar es que $f_n(0)$ tiene una cota superior. Debido a estas cuestiones $f_n(0)$ debe tener un punto límite único. Este punto límite se puede determinar mediante dos cuestiones:

1) $$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(0) = f_n(0)$$

2) Se sabe que $f_{n+1}(0) = f(f_n(0))$

De uno y dos se tiene que en el límite $f_n(0) = f(f_n(0))$ si $f_n(0) = y$, que es el punto límite, entonces:

$y = f(y)$ (Feller, 1957.)

Una forma aproximada de calcular la probabilidad de extinción sin tener que hacer demasiados cálculos es (Keyfitz, 1979).

$$\frac{\Pi_0}{1-\dfrac{\Pi_1}{1-\Pi_0}}$$

Resultados

Para calcular la probabilidad de extinción se utilizaron los datos sobre la distribución de las mujeres de acuerdo al total de hijos nacidos vivos a partir de los censos de población de 1980 y 1990. De estos datos se dedujo la distribución de las mujeres según el número de hijas mujeres que sobreviven a edad madura y que en este caso fue el grupo de edades de 45 a 49 años. Son las mujeres que ya terminaron su periodo fértil. En los cuadros 1 y 2 aparece dicha distribución y en la gráfica 1 aparece la distribución del número de hijas para 1980-1990.

En primer término se puede observar que la probabilidad de extinción pasa de 14.9 por ciento en 1980 a 20.1 por ciento, en 1990. Esto significa un aumento en la probabilidad de extinción como resultado de la disminución de la fecundidad observada entre los años 1980-1990 para las mujeres de edades de 45-49 años. Por otro lado al observar los resultados de la gráfica 1 es importante destacar como la forma de la curva en 1990 muestra una mayor concentración alrededor de 1 y 2 hijas, lo cual pudiera explicarse por el hecho de que las mujeres están teniendo un menor número de hijas y alrededor del 1 y 2 hijas. En conclusión, la probabilidad de extinción además de darnos una medida de cambio en la fecundidad en este caso también nos da un indicio de la caída de la fecundidad de las mujeres en edad madura.

Anexo

Probabilidad de extinción en cuadro 1.

$$\frac{\pi_0}{1-\dfrac{\pi_1}{1-\pi_0}} = \frac{.12396827}{1-.16589872} = \frac{.12396827}{.83410128} = .14862496$$

$$1-\pi_0 = .8763173$$

$$\frac{\pi_1}{1-\pi_0} = \frac{.14533254}{.87603173} = .16589872$$

Probabilidad de extinción en cuadro 2.

$$\frac{\pi_0}{1-\dfrac{\pi_1}{1-\pi_0}} = \frac{.15487819}{1-.22863521} = \frac{.15487819}{.77136479} = .20078462$$

$$1-\pi_0 = .884512181$$

CUADRO 1

DISTRIBUCIÓN P_0, P_1, P_2,.... DE MUJERES DE ACUERDO AL NÚMERO DE HIJAS, DEDUCIDO DE LA DISTRIBUCIÓN DEL NÚMERO DE HIJOS, 1980

No. de hijos	No. de mujeres	0	1	2	3	4	5	6	7
0	139 471	139 471							
1	122 637	62 815	59 822						
2	153 813	40 353	76 861	36 600					
3	183 500	24 658	70 450	67 094	21 299				
4	208 433	14 346	54 650	78 069	49 567	11 801			
5	214 872	7 575	36 070	68 704	65 431	31 157	5 935		
6	218 275	3 941	22 521	53 621	68 089	48 634	18 527	2 941	
7	209 523	1 938	12 918	36 909	58 585	55 794	31 882	10 121	1 377
8	205 985	976	7 434	24 781	47 200	56 190	42 811	20 386	5 547
9	182 509	443	3 796	14 459	32 131	45 901	43 714	27 754	11 328
10	165 496	206	1 959	8 395	21 319	35 531	40 606	32 227	17 538
11	120 213	77	802	3 817	10 906	20 773	27 698	26 378	17 944
12	108 521	35	404	2 118	6 724	14 408	21 955	24 394	19 913
13	161 405	27	334	1 907	6 659	15 854	27 179	34 511	32 868
Total	2 394 653	296 861	348 021	396 474	387 910	336 043	260 307	178 712	106 515
	1	0.12396827	0.14533254	0.16556637	0.16199007	0.14033056	0.10870343	0.07462960	0.04448035

CUADRO 1

DISTRIBUCIÓN P_0, P_1, P_2,.... DE MUJERES DE ACUERDO AL NÚMERO DE HIJAS, DEDUCIDO DE LA DISTRIBUCIÓN DEL NÚMERO DE HIJOS, 1980

No. de hijos	No. de mujeres	8	9	10	11	12	13	Σ
0	139 471							139 471
1	122 637							122 637
2	153 813							153 814
3	183 500							183 501
4	208 433							208 433
5	214 872							214 872
6	218 275							218 274
7	209 523							209 524
8	205 985	660						205 985
9	182 509	2 697	285					182 508
10	165 496	6 263	1 326	126				165 496
11	120 213	8 545	2 713	517	45			120 215
12	108 521	11 852	3 017	1 433	248	20		108 521
13	161 405	23 475	12 421	4 732	1 229	195	14	161 405
Total	2 394 653	53 492	21 762	6 808	1 522	215	14	2 394 656
	1	0.02233810	0.00908775	0.00284300	0.00063558	0.00008978	0.00000585	1.00000125

CUADRO 1

DISTRIBUCIÓN P_0, P_1, P_2,.... DE MUJERES DE ACUERDO AL NÚMERO DE HIJAS, DEDUCIDO DE LA DISTRIBUCIÓN DEL NÚMERO DE HIJOS, 1980

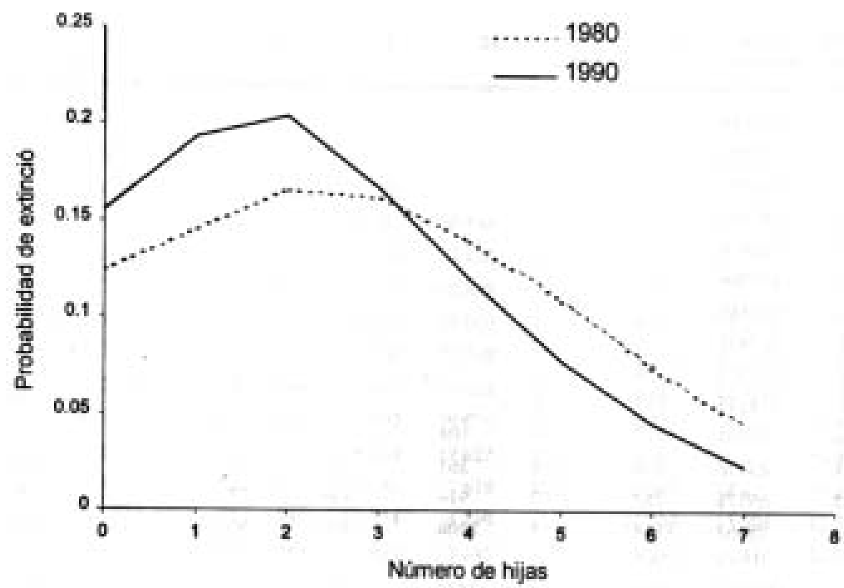
No. de hijos	No. de mujeres	0	1	2	3	4	5	6	7
0	220 749	220 749							
1	179 206	91 789	87 417						
2	310 087	81 351	154 951	73 785					
3	397 564	53 423	152 633	145 362	46 146				
4	388 928	26 769	101 974	145 674	92 490	22 021			
5	347 766	12 260	58 379	111 196	105 899	50 427	9 605		
6	317 589	5 735	32 768	78 019	99 069	70 762	26 957	4 279	
7	267 402	2 473	16 487	47 105	74 768	71 206	40 689	12 917	1 757
8	232 307	1 100	8 384	27 947	53 232	63 370	48 281	22 991	6 256
9	174 245	423	3 624	13 805	30 676	43 822	41 735	26 498	10 815
10	136 794	170	1 619	6 939	17 622	29 369	33 564	26 638	14 496
11	83 976	53	560	2 667	7 619	14 511	19 348	18 427	12 535
12	69 378	23	259	1 354	4 299	9 211	14 036	15 595	12 730
13	78 663	13	163	929	3 245	7 727	13 246	16 819	16 019
Total	3 204 654	496 331	619 218	654 782	535 065	382 426	247 461	144 164	74 608
	1	0.154878	0.1932	0.204322	0.166964	0.119334	0.077219	0.044985	0.023281

CUADRO 1

DISTRIBUCIÓN P_0, P_1, P_2,.... DE MUJERES DE ACUERDO AL NÚMERO DE HIJAS, DEDUCIDO DE LA DISTRIBUCIÓN DEL NÚMERO DE HIJOS, 1980

No. de hijos	No. de mujeres	8	9	10	11	12	13	Σ
0	220749							0
1	179206							0
2	310087							0
3	397564							0
4	388928							0
5	347766							0
6	317589							0
7	267402							0
8	232307	745						745
9	174245	2575	272					2847
10	136794	5177	1096	104				6377
11	83976	5969	1895	361	31			8256
12	69378	7577	3207	916	159	13		11872
13	78663	11441	6054	2306	599	95	7	20502
Total	3204654	33484	12524	3687	789	108	7	50599
	1	0.0104485	0.003908	0.001150	0.0002462	0.000033	0.0000021	0.01578922

GRÁFICA 1
ESTADOS UNIDOS MEXICANOS: DISTRIBUCIÓN DEL NÚMERO DE HIJAS, 1980 Y 1990



Bibliografía

BAILEY, N. T. J., 1964, *The Elements of Stochastic Processes with Applications to the Natural Sciences*, John Wiley and Sons, New York.

BARTLETT, N.S., 1955, *An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.

FELLER, William, 1973, *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, vol. 1, Limusa-Weley.

GALTON, F. y H. W. Watson, 1874, "On the probality of extinction of families", in *Journal of the Antrhopological Institute*, VI.

GRAY, J. R., 1967, *Probability*, Edenburgh and London University Mathematical Texts.

HARRIS, Theodore E., 1963, *The Theory of Branching Processes*, Prentice-Hall, Englewood Cilffs, N. J.

KARLIN, Samuel, 1966, *A first course in stochastic processes*, Academic Press, New York and London.

KEYFITZ, N., 1979, *Introducción a las matemáticas de la población*, Celade, Santiago de Chile.

LOTKA, Alfred J., 1931, "The extinction of families", in *Journal of the Washington Academy of Sciences*, XXI.

PARZEN, Emanuel, 1972, *Procesos estocásticos*, Paraninfo, Madrid.