

UMA CARACTERIZAÇÃO DO CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO INFANTIL E ANOS INICIAIS EM TÓPICOS DE MEDIDA

A CHARACTERIZATION OF KINDERGARTEN AND PRIMARY'S MATHEMATICS TEACHER'S SPECIALISED KNOWLEDGE ON MEASUREMENT TOPICS

RESUMEN

En este estudio consideramos las dimensiones matemáticas y pedagógicas del conocimiento del profesor como especializadas, con el objetivo de caracterizar el contenido de este conocimiento, específicamente asociado a los temas de Medidas. Empleando el marco del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), exploramos y describimos el contenido del conocimiento especializado revelado por un grupo de profesores de Educación Primaria en el Brasil mientras abordan una tarea para la formación, en un curso de desarrollo profesional. Los resultados aportan un refinamiento de la categorización del conocimiento docente asociado a los temas (KoT), considerando por separado el detalle del contenido de este conocimiento relativo a definiciones, propiedades y fundamentos. Además, el estudio presenta un conjunto de descriptores de conocimiento que resaltan las particularidades y especificidades de este componente del conocimiento docente relacionado con los temas de Medida, permitiendo una especie de mapeo de los elementos estructurales y estructurantes de este conocimiento.

PALABRAS CLAVE:

- MTSK
- *Conocimiento del profesor de matemáticas*
- *Medida*
- *Formación de profesores*

ABSTRACT

The specialized dimensions of mathematical and pedagogical knowledge held by teachers are under scrutiny as we aim to depict the content of knowledge disclosed by participants engaged in a formative process with a specific focus on Measurement topics. Employing the framework of Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), this study delves into and expounds upon the knowledge unveiled by a cohort of educators as they tackle a Training Task embedded within a professional development course catered to Early Childhood Education teachers in Brazil. The outcomes of this investigation yield a more refined categorization of teacher knowledge, intimately linked to the topics (KoT), by meticulously examining the intricate facets of this knowledge, encompassing definitions, properties, and fundamental principles. Additionally,

KEY WORDS:

- MTSK
- *Mathematical Teacher's Knowledge*
- *Measurement*
- *Teacher Education*



this research project presents a collection of knowledge descriptors that bring to the fore the nuances and specificities of this crucial aspect of teacher knowledge, particularly as it pertains to Measurement topics, thus facilitating a comprehensive mapping of the structural and foundational elements within this knowledge domain.

RESUMO

As dimensões matemática e pedagógica do conhecimento do professor são consideradas especializadas, e pretende-se descrever o conteúdo do conhecimento revelado por participantes de um processo formativo com foco nos tópicos de Medida. Considerando o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), explora-se e descreve-se o conteúdo do conhecimento revelado por um grupo de professores ao resolverem uma Tarefa para a Formação, implementada em um curso para professores que atuam desde a Educação Infantil, no Brasil. Os resultados trazem um refinamento da categorização do conhecimento do professor, associada aos tópicos (KoT), ao considerar, de forma separada, o detalhamento do conteúdo desse conhecimento, relativamente a definições, propriedades e fundamentos. Além disso, no estudo, um conjunto de descritores de conhecimento evidenciam particularidades e especificidades dessa componente do conhecimento do professor, particularmente para os tópicos de Medida, possibilitando um tipo de mapeamento de elementos estruturais e estruturantes desse conhecimento.

RÉSUMÉ

Les dimensions mathématique et pédagogique du savoir des enseignants sont considérées comme étant spécialisées. L'objectif de cette étude est de décrire en détail le contenu du savoir révélé par les participants lors d'un processus de formation portant sur les sujets de mesure. En utilisant le cadre du *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), nous explorons et décrivons le savoir mis en évidence par un groupe d'enseignants lors de la résolution d'une Tâche de Formation intégrée à un cours destiné aux enseignants travaillant dans l'éducation de la petite enfance au Brésil. Les résultats de cette étude permettent d'affiner la catégorisation du savoir des enseignants en associant ces résultats aux sujets spécifiques (KoT). Nous examinons en particulier les définitions, les propriétés et les fondements du savoir enseignant. De plus, cette étude met en évidence un ensemble de descripteurs du savoir qui mettent en lumière les particularités et les spécificités de cette composante du savoir des enseignants, en se concentrant notamment sur les sujets de mesure. Ces résultats permettent ainsi de cartographier les éléments structurels et fondamentaux de ce savoir.

PALAVRAS CHAVE:

- MTSK
- *Conhecimento do Professor que ensina Matemática*
- *Medidas*
- *Formação de Professores*

MOTS CLÉS:

- MTSK
- *Connaissance du professeur de mathématiques*
- *Mesures*
- *Formation des enseignants*

1. INTRODUÇÃO

O entendimento do tema de Medida é considerado central, em muitos contextos, como forma de desenvolver o Pensamento Matemático (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Organisation for Economic Co-operation and Development [OCDE], 2010) dos alunos, e as noções de medida favorecem a conexão entre a Geometria e os Números, áreas particularmente críticas em termos de ensino e de aprendizagem (Clements & Sarama, 2007). Entender a Medida demanda atribuir significado aos seus elementos fundamentais – unidade de medida e todo a ser medido – e aos processos mentais envolvidos; e compreender as noções de quantidade, notadamente no que se refere à coordenação entre as quantidades discretas e contínuas (e.g., Smith et al., 2011). Tais entendimentos contribuem para desenvolver conhecimento associado aos fundamentos matemáticos de processos aritméticos; raciocínio proporcional; construtos e conceitos associados aos números racionais e à noção de variáveis algébricas (e.g., Szilagyi et al., 2013).

Há já consenso de que para ensinar Matemática é essencial ao professor conhecer ampla e profundamente os tópicos a serem ensinados (Ma, 1999). No entanto, o foco das pesquisas sobre o ensino de matemática tem sido maioritário nos conhecimentos dos alunos (Barret et al., 2012; Hiebert, 1984; Vysotskaya et al., 2020), deixando para segundo plano o conhecimento do professor e suas especificidades para ensinar, em particular, Medidas (Policastro et al., 2020; Ribeiro et al., 2018; Subramaniam, 2014). Sendo o conhecimento do professor um dos elementos que impacta nas aprendizagens e capacidades matemáticas dos alunos (Boyd et al., 2009; Hill & Chin, 2018) e nas ações e decisões que ele emprega em sua prática letiva (Charalambous, 2015; Ribeiro et al., 2012), torna-se essencial explorar algumas das especificidades desse conhecimento como forma de ampliar os entendimentos sobre seu conteúdo e as propostas de programas de formação de professores (Caldatto et al., 2018).

Diversas conceitualizações do conhecimento do professor surgiram nas últimas três décadas, porém destacam-se as que consideram a natureza especializada desse conhecimento (Scheiner et al., 2017) para a atuação docente. Uma delas é o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK¹ (Carrillo et al., 2018). Ao considerarmos a centralidade do entendimento da Medida nas aprendizagens matemáticas dos alunos (Clements & Stephan, 2004), o papel e a importância do conhecimento do professor nessas aprendizagens (De

¹ Optamos por manter a nomenclatura originalmente apresentada, em inglês, para preservar o sentido e significado dos termos propostos pelos autores.

Gamboa et al., 2020) e o ainda inexpressivo número de pesquisas específicas sobre as especificidades do conhecimento do professor para ensinar os tópicos de Medida (Di Bernardo et al., 2018; Ribeiro & Policastro, 2021), levam-nos a uma agenda de pesquisa que objetiva entender e descrever o conteúdo do conhecimento especializado do professor nos tópicos de Medida, com intuito de propor programas de formação que desenvolvam essas especificidades e, assim, melhorem a qualidade das discussões e das aprendizagens matemáticas. Nessa linha importa discutir a seguinte questão: Que conhecimento especializado dos tópicos de Medida revelam professores participantes de uma Formação Continuada focada nas especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática?

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DOS TÓPICOS DE MEDIDA

Os tópicos de Medida e o “senso de medida” (Stephan & Clements, 2003, p. 14) deveriam ocupar um lugar de destaque nos currículos escolares, desde a Educação Infantil², por se constituírem de elementos, noções e conceitos fundamentais ao desenvolvimento de ideias fulcrais da Matemática e ao envolvimento dos alunos com algumas das *big ideas*³ em Matemática (NCTM, 2000). No entanto, tradicionalmente, esse trabalho envolvendo Medida tende a focar-se no ensino das unidades de medida padronizadas (Policastro et al., 2017), sem explorar os procedimentos de medição para cada tipo de grandeza ou os processos (mentais) em que se pauta a atividade de medir (Stephan & Clements, 2003).

Do ponto de vista puramente experimental, medir está associado a conferir a um atributo mensurável de objetos, fenômenos ou processos (Berka, 1983) um valor numérico, obtido ao comparar magnitudes de uma mesma grandeza e quantificar as vezes que uma delas – a unidade de medida – deve ser repetida até que se consiga, por acumulação, obter a magnitude da outra – o todo a ser medido (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004).

² No Brasil, essa etapa corresponde à escolarização de crianças de 0 a 5 anos.

³ Com efeito, uma *big idea* em matemática pode ser considerada como a proposição de uma ideia que é central na fundamentação dos entendimentos matemáticos, porque conecta conceitos e processos (Charles, 2005), de modo a compor uma rede estruturante de conhecimentos matemáticos. Os tópicos do tema de Medida, por exemplo, oportunizam o desenvolvimento de algumas *big ideas* em matemática, tais como “comparação”, “quantificação”, “agrupamentos”, “equivalência”, “proporcionalidade”, “estimação”, “aproximação”, entre outras.

No contexto dos tópicos de Medida, destacam-se as noções de “grandeza” e “magnitude” que, em muitos casos, por questões linguísticas⁴, são tomadas como sinônimos, mas aqui serão devidamente diferenciadas. Assume-se que grandeza é o atributo de um objeto ou fenômeno físico que pode ser quantificado por meio de um processo de medição, enquanto a magnitude é assumida como sendo a variação quantitativa deste atributo (Berka, 1983).

Ainda nesse contexto, outro termo que merece clarificação é “quantidade”. Com efeito, uma quantidade é um montante que pode ser determinado numericamente a partir de uma contagem ou a partir de uma medição. No primeiro caso, denominamos por “quantidade discreta” o valor determinado e, no segundo caso, falamos em “quantidade contínua” (Godino et al., 2002). As grandezas físicas (e.g., comprimento, área, volume, capacidade, tempo), possuem magnitudes expressas por quantidades contínuas. Mas a cardinalidade – número de elementos – de um conjunto, por exemplo, será sempre expressa por uma quantidade discreta. Dessa forma, tratamos as magnitudes como quantidades necessariamente associadas às medidas.

Habitualmente introduzem-se os alunos inicialmente às ideias de medição de comprimento, envolvendo instrumentos e unidades de medidas não padronizados (Smith et al., 2011). Posteriormente apresentam-se as unidades de medida padronizadas de comprimento, e todas as demais grandezas – área, capacidade, massa, volume e tempo⁵ – passam a ser discutidas, sem considerar as particularidades da natureza de cada uma (Ribeiro & Policastro, 2021; Sarama et al., 2011; Szilagyi et al., 2013). Segundo Lehrer et al. (2003, p. 100), as crianças deveriam ser engajadas a “desenvolver uma teoria sobre as medidas, ao invés de simplesmente efetuar medições”, e a conceitualização de cada uma das grandezas, através da comparação e classificação, deveria introduzir esse trabalho (Passalaigue & Munier, 2015).

Os processos (gerais) associados à atividade de medir estão fundamentados em seis princípios, descritos particularmente para o caso da grandeza comprimento (Clements & Stephan, 2004): (a) *partição* – atividade mental de dividir o objeto em magnitudes de mesmo comprimento, quando a unidade de medida é menor que o elemento a ser medido; (b) *unidade de iteração* – habilidade de pensar em um

⁴ Muitos textos utilizam o termo “magnitude” – no inglês e no espanhol, com a mesma grafia da língua portuguesa – para designar “medida”. Outros ainda utilizam este termo para designar “quantidade” ou, de forma mais abrangente, “tamanho”. Entretanto, o mais comum é encontrar o uso do termo “magnitude” como sinônimo de “grandeza”.

⁵ Levando-se em conta os documentos oficiais brasileiros formulados a partir da *Base Nacional Comum Curricular* (Ministério da Educação [ME], 2018).

comprimento como referência para deslocar-se em todo o comprimento do objeto a ser medido, para não deixar espaços por medir entre duas unidades subsequentes, nem sobrepor unidades adjacentes; (c) *transitividade* – processo de, por estimativa ou dedução, obter uma relação de igualdade ou desigualdade (superior ou inferior) de quantidade relacionada a determinada grandeza e estendê-la a outros dois ou mais objetos; (d) *conservação* – compreensão de que qualquer movimento (translação ou rotação) no objeto a ser medido manterá os comprimentos; (e) *acumulação da distância* – entendimento de que, no processo de iteração de uma unidade de comprimento ao longo do elemento que se mede, realiza-se a contagem da quantidade de iterações; (f) *relação da medida com um valor numérico* – reorganização da compreensão do processo de contagem de quantidades discretas para quantidades contínuas.

Embora esses seis princípios tenham sido descritos com base nos processos (mentais e físicos) associados à atividade de medir unidimensionalmente, eles podem ser transpostos para grandezas de outros tipos, considerando algumas adaptações necessárias (Van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2011).

A noção de unidade de medida, porém, ocupa lugar de destaque nas aprendizagens matemáticas dos alunos, pois fundamenta vários outros conceitos como os de fração unitária e de todo e de unidade composta – unidade de unidades (Norton & Boyce, 2015). Mas essa unidade de medida é frequentemente confundida com o instrumento de medida (Gamboa et al., 2020). Nesse contexto, a noção de *unitizing* – operação mental na qual um agrupamento de quantidades pode ser interpretado como uma unidade (Steffe, 2003) – é fundamental para entender o que é e como se constitui uma unidade de medida.

Há várias questões ainda problemáticas para alunos e professores, sendo duas delas a diferenciação entre: (i) área e perímetro; (ii) volume e capacidade. Em (i), a dificuldade apresenta-se, essencialmente, pela não compreensão de qual o atributo (grandeza) a ser medido (Baturó & Nason, 1996). Com efeito, define-se área como a magnitude de uma superfície bidimensional contida por uma fronteira, e o perímetro, como a magnitude dessa fronteira (Clements & Sarama, 2009), o que demanda compreender que o perímetro é uma medida unidimensional (Irwin et al., 2004) e a área está subordinada à coordenação entre duas dimensões (Panorkou, 2020). Em (ii), as dificuldades sustentam-se porque os termos “volume” e “capacidade” são tomados como sinônimos (Ribeiro & Policastro, 2021), o que leva muitas vezes a associarem, nos contextos de ensino, as mesmas unidades de medida (padronizadas) às duas grandezas (Ho & McMaster, 2019), sem realizar o necessário trabalho que priorize a conceitualização de cada uma (Passalaigne & Munier, 2015). Essas dificuldades sustentam-se, também, pelo foco nos procedimentos de cálculo, sem conceitualizar a grandeza, ao assumir que calcular o valor da medida de uma grandeza seja medi-la.

3. CONHECIMENTO DO PROFESSOR DOS TÓPICOS DE MEDIDA, NA PERSPECTIVA DO MTSK

O *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK – (Carrillo et al., 2018) assume a natureza especializada do conhecimento do professor, considerando três domínios: *Mathematical Knowledge* (MK); *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) e *Beliefs* a respeito da matemática e do seu ensino e aprendizagem. No MK consideram-se três subdomínios (ver Figura 1), mas aqui focamos somente o *Knowledge of Topics* (KoT).

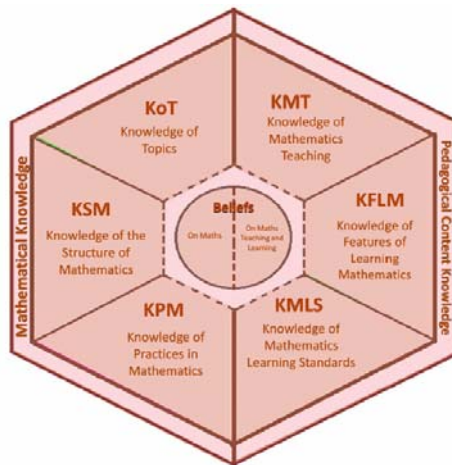


Figura 1. Modelo MTSK (Carrillo et al., 2018, p. 241)

Este estudo foca-se especificamente no KoT, uma vez que é a partir deste subdomínio que se pode evidenciar o conteúdo do conhecimento do professor acerca dos elementos estruturais e estruturantes de cada um dos tópicos matemáticos com os quais irá lidar em sua prática letiva.

Com efeito, o KoT corresponde ao conteúdo do conhecimento conceitual e procedimental do professor, relacionado a cada tópico. Originalmente consideram-se no KoT quatro categorias: (i) *Definitions, properties and foundations*; (ii) *Phenomenology and applications*; (iii) *Procedures*; (iv) *Registers of representation* (Carrillo et al., 2018). Porém, resultados recentes (Policastro & Ribeiro, 2021) mostraram a necessidade de separar a categoria (i) em (ia), (ib) e (ic), contribuindo para refinar o entendimento das especificidades do conteúdo do conhecimento do professor, relacionadas a cada um dos tópicos matemáticos.

Assim, a seguir, passamos a detalhar cada uma das categorias, no sentido de configurar particularidades e especificidades do conteúdo do conhecimento

do professor associado a cada uma delas, especificamente no âmbito dos tópicos de Medida. Esse detalhamento teórico sustentará as análises e discussões realizadas na seção seguinte.

(ia) Definitions

As definições são essenciais na (Educação) Matemática, assumindo papéis e características muito específicos (Zaslavsky & Shir, 2005). Estes papéis relacionam-se com a apresentação dos objetos de uma teoria e a captura da essência dos conceitos, ao comunicarem suas propriedades caracterizadoras (Mariotti & Fischbein, 1997) e os elementos fundamentais para a formação desses conceitos (Vinner, 2002). Além disso, pelas definições é que se fundamentam as demonstrações e a resolução de problemas (Weber, 2002), porque se cria uma uniformidade na comunicação de ideias matemáticas importantes (Zazkis & Leikin, 2008).

As definições que o professor conhece influenciam nas aprendizagens dos alunos (Zazkis & Leikin, 2008), porque contribuem para estabelecer relações entre a imagem do conceito e a sua definição (Tall & Vinner, 1981). Inclui-se no conhecimento do professor conhecer que: o conceito de medida implica a comparação entre magnitudes de uma mesma grandeza, seguida da quantificação de uma delas – unidade de medida – em função da outra, o todo a ser medido (Berka, 1983); unidade de medida é definida como a magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza; que a área é uma grandeza que pode ser definida como a superfície delimitada pela fronteira de uma figura geométrica; o perímetro em duas dimensões é a linha que define a fronteira de uma figura plana; volume é a porção de espaço ocupada por um objeto no espaço; capacidade é o espaço interno de um objeto tridimensional, que pode ser preenchido (Panorkou, 2021).

(ib) Foundations

Um dos aspectos intrínsecos da prática matemática é a possibilidade de criar relações entre áreas aparentemente diferentes. Com efeito, “qualquer tipo de fundamento, se não define, pelo menos distingue entre trabalho matemático e não matemático e, de alguma forma, caracteriza a prática matemática, como sendo de um certo tipo e obedecendo a algumas regras específicas” (Venturi, 2014, p. 46). Se as propriedades matemáticas contribuem para organizar os conceitos, os fundamentos exercem o papel de os conectar. Os fundamentos são, portanto, responsáveis por criar elementos unificadores dos construtos e conceitos matemáticos, dando forma ao conhecimento matemático.

Inclui-se aqui o conhecimento do professor, associado a conhecer que: o que se mede são propriedades mensuráveis dos objetos ou fenômenos – as grandezas; unidade e instrumento de medida são elementos distintos; os constructos “comparar”, “iterar”, “acumular” e “quantificar” são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004) com unidades padronizadas ou não padronizadas dessa grandeza; a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos e ações que são repetidos de forma idêntica, até que se obtenha determinado resultado (Clements & Stephan, 2004); a unidade de medida e o todo a ser medido são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza; as unidades de medida (padronizadas ou não) são adequadas para cada tipo de grandeza; a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição (Bragg & Outhred, 2004; Norton & Boyce, 2015); e que é relevante o papel das unidades não padronizadas para fundamentar noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas (Barrett et al., 2011; Bragg & Outhred, 2004).

(ic) Properties

As propriedades são “relações entre elementos ou subconjuntos de elementos de um conjunto que são instanciadas em situações particulares” (Mason et al., 2009, p. 10). A natureza dessas propriedades matemáticas pode variar; entretanto, o papel que elas exercem no entendimento dos conceitos e dos construtos matemáticos aos quais estão vinculadas é essencialmente o mesmo: organizar e descrever um conjunto de atributos e características relacionados especificamente a certos objetos ou entes matemáticos, de modo a que fiquem evidentes as relações entre eles. Inclui-se, no contexto da Medida, o conhecimento de que: toda unidade de medida, padronizada ou não, possui (sub)múltiplos resultantes do estabelecimento de relações de equivalência entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada (Ribeiro & Policastro, 2021); a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua (Bragg & Outhred, 2004); um instrumento não padronizado para medição de comprimento pode fornecer distintas unidades de medida (Policastro et al., 2017).

(ii) Phenomenology and applications

Nesta categoria inclui-se o conhecimento do professor não só dos conceitos que, dentro de um tópico, organizam e descrevem os fenômenos que dão sentido a esse tópico, mas também dos contextos que organizam todos os fenômenos que compartilham de ideias-chave ou “características estruturais” (Gómez & Cañadas, 2016, p. 316) próprias desses fenômenos. No âmbito dos tópicos de Medida, inclui-se conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma

grandeza em termos da quantificação de uma em função da outra e conhecer os distintos contextos de aplicação da atividade de medir: perímetro, área, capacidade, volume, massa, etc.

(iii) Procedures

Conhecer um conjunto de procedimentos associados a cada um dos tópicos – que muitas vezes se configuram como algoritmos –, os porquês matemáticos que os sustentam, a característica do resultado obtido e as condições necessárias e suficientes para executar tais procedimentos, forma parte desta categoria. No âmbito da Medida, inclui-se, por exemplo, conhecer: os procedimentos de iteração para efetuar uma medição de qualquer grandeza, isto é, a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração; que um instrumento de medida não padronizado pode ser utilizado de forma padronizada (ou não) para efetuar uma medição (Ribeiro et al., 2018); que o resultado da uma medição caracteriza-se pelo valor da medida expressa por um número associado a uma marca, e esta marca corresponde à unidade de medida utilizada (padronizada ou não); que é condição necessária para efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade seja resultante de uma composição de unidades (Norton & Boyce, 2015).

(vi) Registers of representation

O conhecimento matemático é exteriorizado e percebido pelos sentidos, e essa exteriorização pode ocorrer associada a distintas formas de o tornar perceptível. Essas múltiplas formas correspondem a registros de representação (Ainsworth, 2006; Pape & Tchoshanov, 2001) que podem ser, por exemplo, numéricos, pictóricos, gráficos, verbais – em linguagem oral ou escrita. Como elementos desta componente no âmbito da Medida, inclui-se, por exemplo, conhecer diferentes formas de exteriorizar uma medida; relacionar distintos registros de representação e navegar frutiferamente entre eles; ou compreender o emprego do termo “tamanho” como inadequado para se referir à magnitude de qualquer grandeza.

4. CONTEXTO E MÉTODO

Esta investigação compõe uma agenda de pesquisa que busca caracterizar, em vários temas e tópicos matemáticos, o Conhecimento Especializado do professor

que atua desde a Educação Infantil. Aqui discutimos alguns aspectos desse conhecimento no âmbito de distintos tópicos do tema de Medidas. É um estudo de caso instrumental (Stake, 1995), cujo foco de interesse não é o caso em si, mas saber que este instrumento permite conhecer e entender um elemento específico – o conhecimento do professor –, de modo a gerar teorias. As informações foram coletadas em um contexto de um Programa de Formação Contínua⁶ – com sete módulos de formação – que envolveu 17 professores, atuantes desde a Educação Infantil ao Ensino Superior, e que teve o objetivo formativo de desenvolver o conhecimento dos participantes, na perspectiva do MTSK, em vários tópicos matemáticos.

Cada um dos módulos do programa focava em um tema matemático considerado problemático – conforme pesquisas na área de Educação Matemática apontam –, tanto do ponto de vista das aprendizagens dos alunos quanto do processo de ensino, a saber: Números e Operações, Frações, Geometria (dois módulos), Pensamento Algébrico, Probabilidade e Estatística e Medidas.

No programa de formação, aos professores não era atribuído o papel de ativamente decidirem os tópicos que seriam abordados em cada encontro, embora também não lhes fosse vetado o direito de sugerirem ou solicitarem que determinados tópicos fossem incluídos nas discussões. Por exemplo, no caso do módulo de Medidas (o último do programa), embora o tópico de divisão de frações não estivesse inicialmente contemplado no programa, esse assunto foi incluído e abordado a pedido dos cursistas, em uma das cinco sessões de formação do módulo.

Neste estudo, focamos em uma das sessões de formação (carga horária de 8 horas) do módulo de Medidas⁷. No contexto formativo do programa mencionado, todas as sessões de formação eram gravadas em áudio e vídeo – tomando-se um plano geral das discussões em grande grupo e planos com foco em cada um grupo de trabalho – em geral, quatro grupos.

Nesse encontro, os professores foram convidados a refletir sobre a *Tarefa para a Formação* – TpF (Ribeiro, Almeida & Mellone, 2021), intitulada “A Medida, seus princípios, fundamentos e procedimentos”. Com efeito, a conceitualização de uma TpF se dá com base na lente teórica do MTSK, que é utilizada como ferramenta para incluir propostas nas tarefas que efetivamente contribuam para mobilizar

⁶ O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no entendimento e desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor no âmbito da matemática. Página do grupo: www.ciespmat.com.br.

⁷ Por ser um estudo também longitudinal, utilizamos números (de 1 a 17) para identificar os professores, para que seja possível, ao longo da pesquisa mais ampla, acompanhar cada um deles.

elementos do conhecimento especializado dos professores, associados a cada um seis dos subdomínios (KoT, KPM, KSM, KFLM, KMT e KMLS), considerando não só as particularidades de cada tópico matemático em foco na formação, mas também, e obviamente, os objetivos formativos previamente delineados.

Assim, para discutirem as propostas da TpF, os 17 participantes da sessão, identificados por “ P_i ” em que i é um número que corresponde a um professor, foram organizados em quatro grupos: Grupo 1 – três professores atuantes nos Anos Iniciais (P3, P4 e P11) e um estudante de pedagogia (P13); Grupo 2 – quatro professores atuantes nos Anos Iniciais (P2, P8, P9 e P17) e um professor atuante no Ensino Médio e Superior (P10); Grupo 3 – um professor atuante na Educação Infantil (P1); dois professores atuantes nos Anos Finais (P5 e P7) e um estudante de pedagogia (P16); Grupo 4 – um professor atuante na Educação Infantil e Anos Iniciais (P6), um professor atuante nos Anos Iniciais (P13), um professor atuante nos Anos Finais (P14) e um professor que não atua mais no mercado de trabalho (P15). Note-se que cada grupo sempre esteve constituído por professores atuantes (ou em formação) de diferentes níveis de ensino, justamente para que fossem estimulados a compartilhar suas experiências e perspectivas relacionadas com as discussões mobilizadas pela TpF.

Partimos, então da TpF (Ribeiro et al., 2021) e focamos a atenção nas produções e discussões dos professores, associadas a três questões da Parte I da TpF (Figura 2) e a questões vinculadas a uma tarefa para os alunos (Figura 5).

A Medida, seus princípios, fundamentos e procedimentos

Parte 1

- 1) Responda individualmente cada uma das questões a seguir. Para isso, considere que você *não* está em um contexto escolar, ou seja, você *não* deverá responder as questões imaginando como faria para ensinar os objetos de conhecimento abordados nessas questões. Portanto, as suas respostas devem apenas revelar aquilo que você conhece sobre esses objetos de conhecimento.

Você poderá utilizar palavras, desenhos, esquemas ou qualquer outro tipo de representação para explicitar o seu raciocínio.

 - a) O que é medir?
 - b) O que se pode medir?
 - c) Como efetuamos uma medida?
 - d) Com o que podemos medir?
 - 2) Em qual ano/série ou etapa escolar você leciona? Considerando a serie/ano ou etapa escolar em que leciona e sendo o foco principal em Medidas, que trabalho(s) você costuma desenvolver com os seus alunos? Apresente algum(ns) exemplo(s). Caso considere que não desenvolve nenhum tipo de trabalho com esse foco, comente os motivos que o(a) levam a não fazê-lo.
 - 3) Quais são os conceitos matemáticos essenciais à atividade de medir?
-

Figura 2. Questões da Tarefa para a Formação implementada no encontro

Fonte: os autores

A primeira questão foca-se nos construtos e conceitos que fundamentam o fenômeno e os procedimentos da atividade de medir; a segunda associa-se ao conhecimento do professor dos níveis conceituais e procedimentais dos alunos em etapas educativas distintas, com relação aos fundamentos da atividade de medir; a última questão busca ampliar a discussão em relação ao papel das unidades de medida na medição. O conteúdo da segunda questão pode ser tipicamente entendido como estando associado ao domínio do PCK (particularmente, ao subdomínio KMT), mas o foco aqui é no conhecimento matemático manifestado na justificação.

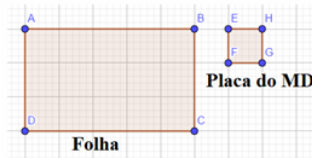
Todas as TpF (Ribeiro, 2021) contêm uma tarefa para alunos, e aqui essa tarefa contribuiu para aceder ao conhecimento dos participantes - e desenvolvê-lo - quanto aos princípios, fundamentos e procedimentos associados à atividade de medir.

Tarefa: Rotação por estações - Vamos medir?

Estação 1: um pedaço de barbante (ou qualquer outro material que se assemelhe a um fio) de comprimento “x” e um paralelepípedo com dimensões $x/10$, $x/5$ e $x/2$.

Orientação da estação 1: Meça o comprimento do fio usando o paralelepípedo. Registre a sua medição na folha.

Estação 2: Uma placa do material dourado e uma folha cuja área seja equivalente a 5x3 placas (maior superfície da placa)



Orientação da estação 2: Meça a folha usando a placa. Registre a sua medição na folha.

Estação 3: Uma balança de pratos (montagem pode ser adaptada com cabide, fios e pratinhos de jardinagem); uma balança digital; uma placa do material dourado e diversos objetos idênticos (em quantidade suficiente para que a massa da placa possa ser comparada com a massa de um desses objetos quando o procedimento for empregado com a balança de pratos)

Orientação da estação 3: Meça a massa da placa do material dourado usando os objetos. Registre a sua medição na folha.

Estação 4: Um recipiente qualquer, um copinho (ou qualquer outro recipiente menor que o primeiro) e uma garrafa d'água cheia. No recipiente, deve haver uma marcação para determinar a quantidade de água a ser depositada no interior - sugestão: a marca no recipiente pode ser a que determina que a quantidade de água a ser depositada corresponde a três unidades do copinho.

Orientação da estação 4: Meça a capacidade de água do recipiente até a marca indicada, usando o copinho.

Figura 3. Estações de trabalho propostas na tarefa para os alunos

Fonte: os autores

Esta tarefa para os alunos incluiu uma abordagem de “metodologias ativas” e continha indicações para a passagem por diferentes estações de trabalho (Figura 3); uma ficha de registro de respostas (Figura 4); e um conjunto de perguntas associadas (Figura 5).

FICHA DE REGISTRO DA TAREFA “*Rotação por estações - Vamos medir?*”

Nome: _____ Data: ____ / ____ / ____

Estação	O que você mediu?	Como você mediu? (descreva passo-a-passo os procedimentos empregados para efetuar a medição e faça um desenho para representar esse processo)	Com o que você mediu?	Qual foi a unidade de medida utilizada para fazer a medição?	Registro da sua medição (o que escreveu na comanda que estava com voce durante o trajeto pelas estações)
1					
2					

Figura 4. Ficha de registros incluída na tarefa para os alunos

Fonte: os autores

Tarefa 1: Rotação por estações - Vamos medir?

Você está diante de um conjunto de quatro estações de trabalho. Em cada estação, você encontrará uma tira de papel contendo uma instrução. Você deverá seguir as instruções contidas nessa tira de papel, sem trocar qualquer tipo de informação com os seus colegas. Depois de executar o que se pede na tira de papel, você seguirá para a próxima estação, procedendo da mesma forma, até a última estação.

1. Agora que você já finalizou o trajeto pelas estações, solicite a ficha de registro ao(à) professor(a). Preencha a ficha de acordo com as instruções a seguir

Instruções para preenchimento da ficha:

Em cada coluna da ficha você deve explicar o seu raciocínio a partir de uma descrição com o máximo de detalhes que conseguir. Você pode fazê-lo usando esquemas, desenhos, palavras, cálculos,...

2. Sente-se com mais dois colegas e, no trio, comparem e discutam sobre os registros que cada um de vocês efetuou em sua própria ficha.
 - a. Quais foram as semelhanças e diferenças nos registros de cada um? Por que vocês acham que essas semelhanças e diferenças ocorreram?
 - b. Considerando os procedimentos empregados para medir em cada uma das estações, vocês acham que são semelhantes ou distintos? Especifique as semelhanças (e/ou diferenças) que consideraram.
 - c. Considerem a unidade de medida utilizada na estação 1. Vocês acham que é possível efetuar as medições propostas nas estações 2, 3 e 4 utilizando essa unidade de medida? Se sim, expliquem, em cada caso, como fariam essas medições. Caso vocês considerem que não seja possível efetuar essas medições, apresentem justificativas dos porquês consideraram tal impossibilidade.

Figura 5. Tarefa para alunos incluída na TpF

Fonte: os autores

Os professores resolveram a Parte I (Figura 2) nos pequenos grupos, e uma discussão plenária foi realizada. Posteriormente resolveram a tarefa para alunos, percorrendo as estações e finalizaram com outra discussão plenária.

O áudio captado durante as interações – nos pequenos grupos e plenárias – foi integralmente transcrito e complementado com informações identificadas nos vídeos (Ribeiro et al., 2012). Na transcrição, as linhas são numeradas, e “*Pi*” corresponde a algum dos professores *i* (de 1 a 17) e a formadora, que é uma das autoras deste trabalho está identificada por F. A análise foi realizada em duas fases, uma manual e outra com o auxílio do *software* ATLAS.ti, procurando evidências de conhecimento no âmbito das categorias do KoT. Ao inserir os documentos no ATLAS.ti, as transcrições foram identificadas por “ME.I.N”, e os registros escritos digitalizados foram identificados por “T.I.N”, em que “N” representa o número do grupo em que ocorreram as discussões, e, para as plenárias, usou-se a nomenclatura “ME.PL.I”.

Após alguns ciclos de codificações, incluindo-se, excluindo-se ou reagrupando-se as produções dos professores e determinadas categorias do KoT, até atingir a saturação (Strauss & Corbin, 1994), identificaram-se 473 produções, evidenciando conteúdo conhecimento especializado (ver Tabela I), relacionado ao KoT.

TABELA I


Incidência de produções associadas a evidências do conhecimento em cada categoria do KoT

<i>Categorias do KoT</i>	<i>Produções</i>
<i>Definitions</i>	51
<i>Foundations</i>	218
<i>Properties</i>	42
<i>Phenomenology and applications</i>	14
<i>Procedures</i>	121
<i>Registers representation</i>	27
<i>Total</i>	473

Uma análise transversal e longitudinal buscou semelhanças e diferenças entre o conteúdo do conhecimento identificado. Refinando a cada ciclo de análise, emergem os denominados descritores de conhecimento do professor (Policastro & Ribeiro, 2021), nomeados de acordo com o subdomínio (KoT) e a categoria a que pertencem: (*Definitions* (d); *Foundations* (f); *Properties* (pp); *Phenomenology and Applications* (ph); *Procedures* (mp); *Registers of representantion* (rp)). A cada um foi atribuído um número sequencial.

Na Tabela II exemplificamos como esses descritores emergem da análise. Os professores revelam conhecimento associado a *Definitions*: ao buscarem explicar e conceituar o que é medir (ME.I.2, 46-48; ME.I.3 e T.I.1); e ao referirem certos entes – instrumento e unidade – que consideram necessários na atividade de medir (ME.I.3, 1033-1040).

TABELA II
Reagrupamento das produções e emergência dos descritores de conhecimento

<i>Definitions</i>	
<i>Produções dos professores</i>	
<p><i>ME.I.2</i></p> <p>46. P2: <i>Eu coloquei: é comparar. Pegar um cubinho e ver quantos cabem em uma barrinha.</i></p> <p>47. P8: <i>Eu coloquei: é quantificar o tamanho de alguma coisa.</i></p> <p>48. P10: <i>Eu coloquei: medir algo é compará-lo a uma unidade preestabelecida.</i></p> <p><i>T.I.1</i></p> <p></p> <p><i>“Medir é especificar o tamanho de determinadas coisas.”</i></p>	<p><i>ME.I.3</i></p> <p>1033. P5: <i>A unidade que eu encontrei foi área. Vocês...</i></p> <p>1034. P7: <i>Só comprimento e largura.</i></p> <p>1035. P5: <i>Então é só comprimento!</i></p> <p>1036. P7: <i>Hãn?</i></p> <p>1037. P5: <i>É só uma unidade: de comprimento.</i></p> <p>1038. P1: <i>Ah, tá.</i></p> <p>1039. P5: <i>A unidade é comprimento.</i></p> <p>1040. P7: <i>A unidade é comprimento.</i></p>
<i>Análise</i>	
<p>Conhecimento de que a medida está associada à comparação de uma unidade de medida (denominada majoritariamente por “referência”) com um todo, seguida de quantificação e/ou atribuição de um valor numérico.</p>	<p>Não fazem distinção entre unidade de medida e instrumento de medição. Revelam entender que a unidade de medida se relaciona com uma magnitude, mas alguns professores confundem unidade de medida com grandeza.</p>
<i>Descritores emergentes</i>	
<p><i>KoTd1</i> - conhecer a definição de medida: relação numérica entre magnitudes de uma mesma grandeza, obtida por comparação seguida de quantificação de uma dessas magnitudes (todo a ser medido) em função da outra (unidade de medida).</p>	<p><i>KoTd5</i> - conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude dessa mesma grandeza.</p>

Em alguns casos, o conteúdo do conhecimento revelado pelos professores foi identificado como matematicamente inapropriado, fosse por incorreções conceituais ou por inadequações de contextos em que esses conceitos eram evocados. Em outras situações suas produções não exteriorizaram, de forma explícita, elementos suficientes para caracterizar o conteúdo do conhecimento, mas a discussão conjunta com os fundamentos teóricos assumidos para a análise permitiu constituir tais descrições. Nesse sentido os descritores emergentes

dessas produções são identificados, respectivamente, com os símbolos “*” e “**” associados, sendo KoTph2* e KoTf2** dois exemplos.

Das 473 evidências identificadas, sintetizamos 31 descritores: 6 relacionados com *Definitions*; 8 com *Foundations*; 5 com *Properties*; 2 com *Phenomenology and applications*; 8 com *Procedures*; e 2 com *Registers of representation*. A ordem da numeração dos descritores está relacionada exclusivamente com a quantidade de produções dos professores vinculadas a cada um deles, ou seja, quanto maior o número de produções associadas, menor é a numeração do descritor. Portanto, KoTd1 tem mais produções associadas do que KoTd5, por exemplo. Assim, não seguimos uma ordem sequencial na numeração dos indicadores de cada categoria, mas uma numeração por “pesos”.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Todos os grupos de professores consideraram que medir é comparar uma unidade de medida (que denominam “referência”) com um todo, seguido de quantificação e atribuição de um valor numérico (*KoTph1* – conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma grandeza em termos da quantificação de uma em função da outra).

ME.I.4

54. P14: *Eu coloquei que medir é comparar quantas vezes algo cabe em outro.*

55. P13: *É, eu coloquei também: medir é comparar e quantificar. Comparar coisas*

56. *comparáveis e dizer quantas vezes cabe.*

Figura 6. Trecho transcrito da discussão no Grupo 4

Ao assumirem a comparação como um construto fundamental para a medição (ME.I.4: 54), reconhecem sua relação com uma etapa inicial do processo completo de medir, mas incluem outros (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004), como é o caso da quantificação (ME.I.4: 55) (*KoTmp6* – conhecer que a comparação é uma condição necessária, mas não suficiente para medir).

Apesar de não ficar claro se entendem os processos “quantificação” e “atribuição do valor numérico” como um único processo ou como processos distintos (ME.I.2: 84 – 90), reconhecem que há processos (mentais) e construtos fundamentais presentes em toda atividade de medição (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004) (*KoTf2*** – conhecer que os construtos “comparar”, “iterar”, “acumular” e “quantificar” são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza).

ME.I.2

84. P9: *Eu e a P8 colocamos a questão do quantificar, vocês acham que a gente*
 85. *coloca o quantificar aqui? Que medir a gente vai quantificar...*
 86. P10: *Ah, é que ele já está implícito aqui, não é?*
 87. P8: *Quantificar nesse sentido, porque eu pensei em número, tem dez, tem quinze,*
 88. *tem vinte, tem trinta... eu quantifico, eu dou um número para ele.*
 89. P10: *É que quando você compara com uma unidade padrão, você...*
 90. P9: *Já está quantificando.*

Figura 7. Trecho da discussão no Grupo 2

Revelam também um conhecimento associado aos fenômenos e aos contextos de aplicação (Gómez & Cañadas, 2016) dos fundamentos da atividade de medir (ME.I.3: 367 – 370), mesmo quando sugerem a presença desses fundamentos em contextos a que efetivamente não estão associados (*KoTph2** – conhecer os distintos contextos de aplicação dos fundamentos da atividade de medir: medir comprimento, área, capacidade, massa, etc.).

ME.I.3

367. P1: *Nós fizemos uma comparação de medida agora mesmo: que horas são?*
 368. *Quanto tempo falta para acabar? Nós medimos o tempo.*
 369. P7: *Sim, claro!*
 370. P1: *A gente está medindo o tempo, quanto tempo falta, por exemplo, não*

Figura 8. Trecho da discussão no Grupo 3

Ainda relativo à “quantificação”, revelam conhecer que uma medida é dada por um valor expresso por uma quantidade contínua – embora não referindo explicitamente essa continuidade (ME.I.1: 304 – 310) –, em particular quando a medição é associada à grandeza comprimento. Essa interpretação pode ser dada em virtude da afirmação que P4 faz de que “quantificar está dentro de medida”, levando-nos a reconhecer que há um conhecimento mobilizado de que a quantificação pode se referir a quantidades contínuas ou discretas, mas que, no caso da contagem, a quantidade a que nos referimos é sempre do tipo discreta, o que não ocorre com a natureza da magnitude de uma medida (*KoTpp3*** – conhecer que a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua).

ME.I.1

304. (F pega um conjunto de cubinhos do material dourado e coloca-os sobre a mesa)
 305. F: *Três, seis, nove, doze, quinze, dezoito, vinte e um, vinte e dois. Vinte e dois*
 306. *cubinhos. Medir?*
 307. P4: *Medir a quantidade? Não existe medir a quantidade, existe?*
 308. P3: *Isso é contar ou quantificar. Contar e/ou quantificar, é a mesma coisa.*
 310. P4: *Mas a quantificação está dentro de medida!*

Figura 9. Trecho transcrito da discussão no Grupo 1

Ainda que os professores reconheçam que o valor de uma medida pode ser expresso em termos de um número não inteiro (Smith et al., 2011) (*KoTpp3***), particularmente quando lidam com medições em que a unidade de medida é não padronizada (e.g., arestas de um paralelepípedo), nem todos (ME.PL.I:1111 – 1114) consideram a possibilidade de que os valores numéricos das medidas possam ser expressos por múltiplos e submúltiplos dessa unidade de medida (*KoTpp1* – conhecer que os múltiplos ou submúltiplos de uma unidade de medida – padronizada ou não – são estabelecidos por meio de relações de equivalências entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada).

ME.PL.1

1107. P4: *Eu fiz também, e deu quatro ponto nove. Então, deu quatro placas e nove...*
 1108. *Aí, como eu sei que uma placa tem dez barrinhas, eu converti minha unidade de*
 1109. *medida em barrinhas. Então, eu coloquei que tinham 49 barrinhas. E aí, tudo eu*
 1110. *medí com barrinhas. Você entendeu?*
 1111. F: *Eu acho que sim! Ao invés de você pensar em placas como unidade,*
 1112. *você pensou em barrinhas.*
 1113. P4: *Isso. em barrinhas. Porque eu não posso falar “quatro placas e nove,*
 1114. *barrinhas”, então, eu converti tudo em barrinhas.*

Figura 10. Trecho da discussão plenária

Consideram, inapropriadamente, que os submúltiplos de uma unidade correspondem a outra unidade distinta, algo que se relaciona com conhecer que toda unidade de medida possui múltiplos e submúltiplos (Berka, 1983) (*KoTpp2*–* conhecer que toda unidade de medida, padronizada ou não padronizada, possui múltiplos e submúltiplos).

Revelam também um conhecimento das relações entre múltiplos e submúltiplos, ao efetuarem uma transposição direta entre a estrutura do Sistema de Numeração Decimal (valor posicional) e as relações de equivalência entre múltiplos e submúltiplos de unidades padronizadas que possuem base 10 (M.E.I.3: 225-228), como é o caso de comprimento, capacidade e massa. No entanto, pautam-se em memorização de regras que nem sempre estabelecem congruências verdadeiras (*KoTpp5** – conhecer as relações de equivalência estabelecidas entre múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida padronizada com estrutura decimal – base 10).

ME.I.3

225. P7: *Quando você ensina decimais, a partir do momento que você trabalha*
 226. *com medidas, você vai usar os mesmos números. Não vai mudar nada!*
 227. *O que é que vai mudar? É a nomenclatura. É a grandeza, só. O que era décimo,*
 228. *passa a ser decímetro, decilitro, decigrama. O outro, centímetro, centésimo.*

Figura 11. Trecho da discussão no Grupo 3

Quando as discussões se centram nas grandezas volume e capacidade (ME.I.2: 1468-1473), os professores revelam entender capacidade de um recipiente como a medida de “algo que cabe dentro” dele (Panorkou, 2021) (*KoTd2* – conhecer que a definição de capacidade pode ser dada como o espaço interno de um objeto tridimensional que pode ser preenchido).

ME.I.2

1468. P10: *Não, o que tem volume é algo maciço, um sólido.*

1469. P9: *Sólido.*

1470. P10: *Quando é sólido, ele tem volume.*

1471. P9: *Quando ele é oco...*

1472. P10: *Quando ele é oco, ele tem capacidade.*

1473. P9: *Então, o recipiente tem capacidade.*

Figura 12. Trecho da discussão no Grupo 2

Corroborando a dificuldade para distinguir as grandezas volume e capacidade (Ho & McMaster, 2019), alguns professores consideram que somente os objetos sólidos (maciços) possuem volume, e objetos ocos possuem apenas capacidade (*KoTd4* – conhecer que a definição de volume pode ser dada como a porção do espaço ocupado por um objeto tridimensional).

ME.I.1

1231. P4: *A capacidade está relacionada com o que você usa para preencher,*

1234. *não é? Será que é essa a diferença entre capacidade e volume?*

1235. P3: *Para mim ainda é a mesma coisa.*

1236. P4: *Porque, por exemplo, esse copo. Ele tem 150 ml. Então, o volume dele*

1237. *é de 150 ml. Agora, quantos copinhos de café eu vou precisar para*

1238. *encher aqui? Ou de farinha? Ai eu acho que é a relação...*

1239. P11: *Depende do que eu estou usando.*

1240. P3: *É, por exemplo. tem capacidade para três copinhos de água, dois de*

1241. *feijão*

Figura 13. Trecho da discussão no Grupo 1

Entendem a grandeza área como o resultado do “preenchimento” de uma região (MEI.1: 657-659), definida uma unidade de medida, mas também como o resultado do produto de magnitudes unidimensionais, o que se associa com a coordenação entre duas dimensões (Panorkou, 2020), mas não entre duas unidades de medida (*KoTd3* – conhecer que a área pode ser definida como a superfície delimitada pela fronteira).

ME.I.1

657. P3: *Ai já entra a questão de área e perímetro, não é? Se eu quero saber área,*
 658. *eu vou completar* (passa a caneta sobre a área da superfície da folha). *Se é só o*
 659. *perímetro, eu faço só ao redor* (contorna a borda da folha com a caneta).

Figura 14. Trecho da discussão no Grupo 1

Os professores não fazem distinção entre medir a área e calcular o valor da área de uma região (*KoTmp3** – conhecer que efetuar uma medição não corresponde a calcular uma medida, mas sim estabelecer uma relação entre duas magnitudes de uma mesma grandeza) por meio de fórmulas matemáticas, especificamente no caso do retângulo (ME.I.3: 899-902) (*KoTmp8* – conhecer o procedimento associado ao uso da fórmula para determinar o valor da grandeza área no caso do retângulo: efetuar o produto das magnitudes dadas em dimensões ortogonais).

ME.I.3

899. P16: *Mas, a área é comprimento vezes altura, não é?*
 900. P7: *A área é comprimento vezes altura, isso.*
 901. P5: *Comprimento vezes largura*
 902. P16: *Ah, vezes largura...*

Figura 15. Trecho da discussão no Grupo 3

Em contrapartida, particularmente no caso das figuras poligonais, os professores reconhecem que o perímetro não pode ser definido a partir do modo como é calculado (ME.I.3: 959-967) (*KoTd6* – conhecer que a definição de perímetro – em 2D – é o comprimento da linha que define a fronteira de uma figura plana).

ME.I.3

959. P5: P16, *essa palavra, perímetro, significa contorno e o metro é a medida.*
 960. *Então, quando você fala de perímetro, você está medindo o contorno da figura*
 961. *O pessoal usa: “o perímetro é a soma dos lados”. Porque sempre pegam*
 962. *figurinhas, polígonos, que são essas figurinhas assim, regulares,*
 963. *mas você não pode definir como sendo soma dos lados. Por quê? Porque você*
 964. *tem figuras assim* (representa uma figura geométrica não poligonal). *Como eu*
 965. *vou medir o perímetro disso? Então, você pega um barbante, coloca sobre*
 966. *essa linha, estica e mede com uma trena, isso é perímetro, a medida do*
 967. *contorno.*

Figura 16. Trecho transcrito da discussão no Grupo 3

Outros dois construtos que os professores não distinguem (ME.I.1: 436-441) são unidade de medida e instrumento de medição (*KoTf1** – conhecer a distinção entre unidade de medida e instrumento de medição).

ME.I.1

436. P4: *Mas só que, olha: “como efetuamos uma medida?”. Com um instrumento.*
 437. *E aí, com o que podemos medir? Não é a mesma coisa? Com um instrumento...*
 438. *Aí eu coloquei até um asterisco porque eu acho que é a mesma coisa!*
 439. P11: *Eu coloquei que efetuamos utilizando uma unidade de referência*
 440. *Aí eu coloquei: fita métrica, régua, mãos, pés... eu especifiquei aqui*
 441. *o instrumento. Padrão ou não.*

Figura 17. Trecho da discussão no Grupo 1

Ao passarem pelas estações para resolver a tarefa para os alunos, onde deveriam medir a capacidade e a massa de alguns objetos utilizando diferentes instrumentos de medição (copo plástico e balança de cabide) e unidades de medida não padronizadas (capacidade do copo e massa de uma barra do material dourado), não diferenciaram instrumento de unidade de medida (*KoTd5* – conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza).

Com o que você mediu?	Qual foi a unidade de medida utilizada para fazer a medição?
Copinho de café (50 ml) com água	1 copinho ou (50 ml ou mililitros)

Figura 18. Registro de um professor do Grupo 3

Mesmo assim, ao referirem o seu trabalho habitual com os alunos (Figura 19), particularmente no caso da grandeza comprimento, os professores revelam conhecimento do papel das unidades de medida não padronizadas no entendimento das grandezas padronizadas (Passalaigue & Munier, 2015) (*KoTf4* – conhecer que as unidades de medida não padronizadas fundamentam as noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas).

② O início do trabalho se dá através de instrumentos não convencionais p/medir, (palmo, passos, barbantes). Após em diferentes contextos e maneiras inicia-se o uso das grandezas convencionais.

O início do trabalho se dá através de instrumentos não convencionais para medir (palmo, passos, barbantes). Após, em diferentes contextos e maneiras, inicia-se o uso das grandezas convencionais.

Figura 19. Produção de um professor do Grupo 2

Identificam que um instrumento não padronizado (ME.I.1: 682-688) pode fornecer mais de uma unidade de medida (*KoTpp4* – conhecer que um instrumento padronizado, ou não, para medição de comprimento pode ser empregue associado a distintas unidades de medida e a distintas grandezas) e revelam conhecer que instrumentos não padronizados (ME.I.1: 689-691) podem ser utilizados de forma não padronizada (Ribeiro et al., 2018) para medir distintas grandezas (*KoTpp7* – conhecer que uma medição pode ser efetuada utilizando unidades não padronizadas de forma não padronizada: e. g., largura da caneta para medir comprimento; menor face de um prisma para medir a área de uma região).

ME.I.1

682. P12: *Talvez você queira medir a área do objeto* (com o indicador, contorna

683. o perímetro da folha sulfite).

684. P3: *Ah, e possa medir só pela largura da caneta* (simula a iteração da caneta

685. na superfície da folha).

686. P12: *É, ou você mede assim* (considera o comprimento da caneta como unidade de

687. medida para medir o perímetro da folha), *que seria o comprimento, ou você mede*

688. *assim* (itera largura como unidade para medir a área da folha), *que seria a área*

689. P3: *Mas não só a área, não é? Eu poderia medir esse espaço* (passa o indicador

690. no comprimento da folha) *com a caneta assim* (utiliza a largura da caneta como

691. unidade para medir o comprimento da folha).

Figura 20. Trecho da discussão no Grupo 1

No entanto, parece haver um “salto” entre o que os professores consideram como possibilidade de trabalho introdutório para a grandeza comprimento e o que se propõe para trabalhar com outras grandezas (Stephan & Clements, 2003). Em particular, para as grandezas capacidade e massa, revelam dificuldades (ME.I.4: 957-969) em conceber que uma medição pode ser efetuada com uma unidade de medida não padronizada, e resistem a aceitar o valor da medida correspondente obtido em termos dessa unidade (Bragg & Outhred, 2004) (*KoTf4*).

ME.I.4

957. P14: *Como eu queria medir a massa da placa, a balança de cabide,*
 958. *para mim, não serviria de nada, então não usei ela. Eu usei só a*
 959. *balança digital. 'Meca massa da placa'. No cabide?*
 960. P6: *E, você teria que estimar...*
 961. P13: *Ora, na balança você não tem a (gesticula com as mãos como*
 962. *se indicasse os dois pratos da balança)... o quilo?*
 963. P6: *Ah, é! Você iria colocando até igualar!*
 964. P14: *Mas aí você ia ter que fazer comparação. Qual é*
 965. *a massa da placa? A massa da placa é igual a massa de 12*
 966. *barrinhas?*
 967. P13: *É, 12 barrinhas separadas.*
 968. P14: *Daí eu pensei assim, se eu quero a massa da placa, já vou usar*
 969. *um instrumento que me dá a massa, que é a balança!*

Figura 21. Trecho da discussão no Grupo 4

Essas dificuldades estão associadas a uma lacuna entre as discussões desenvolvidas no âmbito da grandeza comprimento e o que (não) se faz para a conceitualização das outras grandezas (Passalaigue & Munier, 2015), mas, fundamentalmente, vinculam-se ao conteúdo do conhecimento dos professores acerca de: o que é uma medida (*KoTd1*); o que é uma unidade de medida (*KoTd5*); os constructos que fundamentam a atividade de medir (*KoTf2***); o entendimento de que o que se mede são as grandezas (*KoTf3*). De fato, assumem inapropriadamente (ME.I.1: 33 e 97-98) que grandeza é uma “característica” de um objeto físico (Berka, 1983), e não uma propriedade mensurável desse objeto ou de um fenômeno físico (*KoTf3** – conhecer que o que se mede são grandezas que correspondem a propriedades mensuráveis dos objetos ou fenômenos).

ME.I.1

33. P12: *Medir é dar, mensurar valor a uma característica do objeto...*
 (...)
 97. P4: *acho que são essas três as características, não?*
 98. *Tamanho, volume ou massa. Tem alguma outra?*

Figura 22. Trecho da discussão no Grupo 1

O termo “tamanho” é utilizado de forma genérica pelos professores, principalmente associado ao comprimento – uso matematicamente inadequado –, o que revela seu conhecimento da nomenclatura da grandeza (*KoTrpl** – conhecer a nomenclatura adequada para se referir a cada uma das grandezas). Ao mesmo tempo, revelam conhecimento da necessidade de uma nomenclatura matemática

adequada (ME.I.1: 1659-1670), associada às unidades de medida (*KoTrp2* – conhecer a nomenclatura e simbologia adequadas para se referir às unidades de medida: unidades padronizadas e não padronizadas).

ME.I.1

1659. P3: *Qual foi a unidade de medida? Na estação 1 é barra de madeira. Depois*

1660. *eu acrescentei largura do paralelepipedo, para ficar mais acadêmico.*

1661. P11: *Eu acho que é a nomenclatura, também. Porque todo mundo usou o*

1662. *paralelepipedo.*

1663. P4: *Eu acho que é a referência. Porque, eu, por exemplo, usei como referência a*

1664. *altura, largura e o comprimento.*

1665. P12: *É porque eu acho que tem diferença usar a largura dela, eu posso ter usado*

1666. *outro lado do paralelepipedo.*

1667. P4: *Como largura, não é?*

1668. P3: *Eu coloquei só barra de madeira. Mas, se eu falasse para você: meça com a*

1669. *barra de madeira, não ia dar o mesmo. Você poderia medir de outro jeito. Então,*

1670. *está errado o jeito que eu fiz.*

Figura 23. Trecho da discussão no Grupo 1

Todos os professores reconhecem a importância do construto “unidade de medida” (Bragg & Outhred, 2004) e sabem que, sem ela, não se efetua uma medição (*KoTf5* – conhecer que a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição).

ME.I.3

54. P7: *Eu posso medir qualquer coisa, desde que eu possua um referencial,*

55. *que no caso seria...*

56. P1: *A unidade de medida.*

Figura 24. Trecho da discussão no Grupo 3

Somente dois dos quatro grupos (ME.I.2: 60-62) abordaram explicitamente um dos elementos do conhecimento dos fundamentos da Medida (*KoTf6* – conhecer que a unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza, ou seja, são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza).

ME.I.2

60. P17: *É, por exemplo, se eu vou medir o comprimento, eu vou pegar algo que...*

61. P10: *Que tenha comprimento...*

62. P9: *É, porque depende do que você vai medir.*

Figura 25. Trecho da discussão no Grupo 2

Esse fato associa-se a duas dimensões: por um lado, por não deterem um conhecimento associado à definição de medida (*KoTdl*), não consideram que a unidade de medida e o todo a ser medido tenham de ser magnitudes de mesma natureza. Por outro lado, a “comparação” entre uma unidade de “referência” e algo relacionado a essa referência é o construto que sustenta o conteúdo desse conhecimento; portanto, tal comparação só é possível entre magnitudes de mesma natureza, mas não distinguir unidade de instrumento de medição (*KoTf1**) pode sustentar o não reconhecimento da necessidade de que as magnitudes da unidade e todo a ser medido sejam da mesma natureza.

Os professores revelam um conhecimento associado às unidades de medida padronizadas e não padronizadas mais comuns (*KoTf7* – conhecer as unidades de medida padronizadas para cada grandeza).

ME.I.4

99. P13: *O padrão está relacionado com, por exemplo, o metro, o centímetro.*
 100. *Entendeu? E o não padrão é, por exemplo, eu pegar esse livro e fazer...*
 101. P6: *Por meio dele.*
 102. P13: *Isso, o livro, o palmo.*
 103. P14: *Qual é o padrão para medida de comprimento? O metro. E esse padrão*
 104. *para medida de comprimento foi combinado, como a P15 falou, em convenção.*

Figura 26. Trecho da discussão no Grupo 4

Ao resolverem a tarefa dos alunos, revelam conhecer procedimentos de medição fazendo uso dos princípios essenciais da atividade de medir (Clements & Stephan, 2004). No entanto, solicitados a medir o comprimento de um elemento maleável – barbante – utilizando como instrumento de medida um elemento sólido – paralelepípedo –, os professores revelam dificuldades em aplicar esses princípios.

ME.I.4

680. (P14 apoia o paralelepípedo sobre a maior face. Usa a maior aresta como unidade
 681. de medida e estica o fio sobre essa face, coincidindo uma das extremidades com
 682. um dos vértices do paralelepípedo).
 683. P14: *Aí parou aqui, aí você marca ele aqui.*
 684. (P14 dobra o fio sobrepondo a parte que ainda falta para ser medida
 685. sobre a parte que já foi medida)
 686. *Você pode voltar ele aqui.*
 687. P6: *Eu também fiz isso!*

Figura 27. Trecho da discussão no Grupo 4

No procedimento descrito (ME.I.4: 680-686), P14 não considera que, ao dobrar o fio, uma porção do todo a ser medido – o comprimento do barbante – foi perdida, deixando lacunas entre as unidades de medida na iteração (Clements & Stephan, 2004). Apesar de a maioria efetuar o procedimento de iteração de forma adequada (descrito na Figura 28), não há menção explícita ao que sustenta tal procedimento (*KoTmpl*** – conhecer os procedimentos de iteração para se efetuar uma medição de qualquer grandeza: a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração). Assim, pode ser algo que forma parte do *script* de medição, e não é, portanto, entendido como central nesse processo, que fundamenta a existência de um algoritmo a ele associado (*KoTf8*** – conhecer que a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos que são repetidos de forma idêntica até que se obtenha determinado resultado).

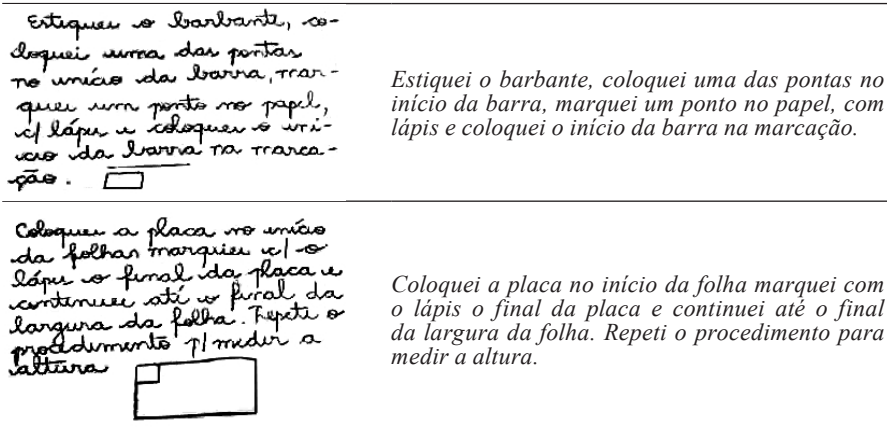


Figura 28. Registro de um professor do Grupo 1

Para medir uma distância (ME.I.3: 175-178), consideram a relação entre a magnitude da unidade de medida e a quantidade de vezes que terá de ser iterada para medir o todo (*KoTmpl4* – conhecer a característica do resultado de uma medição: o valor numérico (v) obtido na medição é inversamente proporcional à magnitude da unidade de medida (u), quando se considera constante a magnitude da mesma natureza do todo (d) a ser medido ($v = d/u$)).

ME.I.3

- 175. P5: Então, eu vou verificar quantos palmos eu tenho aqui nesta folha.
- 176. P7: O que vai ser diferente de cada um de nós. Depois nós vamos comparar.
- 177. P5: E, eu vou comparar...
- 178. P7: A sua medida ficou menor porque o seu palmo é maior.

Figura 29. Trecho de discussão no Grupo 3

Apesar de os professores associarem instrumento de medida com unidade de medida (ME.I.1: 412-413), destacam a necessidade (condição necessária) de que essa seja única no processo de medição. Porém, não fica claro se conhecem que na iteração sempre se deve utilizar a mesma unidade de medida (Norton & Boyce, 2015), ainda que ela seja formada pela composição de outras unidades (*KoTmp5***: conhecer que é condição necessária para se efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade seja resultante de uma composição de unidades – *unitizing*).

ME.I.1

411. P4: (...) *E, a partir do momento*

412. *que eu defino o meu instrumento, eu devo utilizá-lo durante todo o meu*

413. *processo de medida. Que aí foi o que ela falou uma vez, lembra? Ah, quanto*

414. *tem essa folha?*

415. (P4 coloca uma caneta, uma borracha e um lápis alinhados sobre o maior

416. comprimento de uma folha sulfite)

417. *Tem uma caneta, ima borracha e um lápis. Não. Se eu comecei com uma caneta,*

418. *eu tenho que terminar com a caneta.*

Figura 30. Registro de um professor do Grupo 1

No intuito de sintetizar os resultados obtidos neste estudo e de avançar na teorização desse conhecimento – por via dos descritores –, apresentamos uma caracterização obtida do conhecimento especializado do professor relativamente a tópicos de Medida – *KoT*.

TABELA IV

Categorias e descritores relacionados ao subdomínio *Knowledge of Topics* de Medida

<i>Categorias</i>	<i>Descritores</i>
<i>Definitions (KoTd)</i>	<p><i>KoTd1</i> – conhecer a definição de medida: relação numérica entre magnitudes de uma mesma grandeza, obtida por comparação seguida de quantificação de uma dessas magnitudes (todo a ser medido) em função da outra (unidade de medida).</p> <p><i>KoTd2</i> – conhecer que a definição de capacidade pode ser dada como o espaço interno de um objeto tridimensional que pode ser preenchido.</p> <p><i>KoTd3</i> – conhecer que a área pode ser definida como a superfície delimitada pela fronteira.</p> <p><i>KoTd4</i> – conhecer que a definição de volume pode ser dada como a porção do espaço ocupado por um objeto tridimensional.</p> <p><i>KoTd5</i> – conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza.</p> <p><i>KoTd6</i> – conhecer que a definição de perímetro (em 2D) é o comprimento da linha que define a fronteira de uma figura plana.</p>

<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);"><i>Properties (KoTpp)</i></p>	<p><i>KoTpp1</i> – conhecer que os múltiplos ou submúltiplos de uma unidade de medida – padronizada ou não – são estabelecidos por meio de relações de equivalências entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada.</p> <p><i>KoTpp2*</i> – conhecer que toda unidade de medida (padronizada ou não padronizada) possui múltiplos e submúltiplos.</p> <p><i>KoTpp3**</i> – conhecer que a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua.</p> <p><i>KoTpp4</i> – conhecer que um instrumento padronizado, ou não, para medição de comprimento pode ser empregue associado a distintas unidades de medida e a distintas grandezas.</p> <p><i>KoTpp5*</i> – conhecer as relações de equivalência estabelecidas entre múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida padronizada com estrutura decimal (base 10).</p>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);"><i>Foundation (KoTf)</i></p>	<p><i>KoTf1*</i> – conhecer a distinção entre unidade de medida e instrumento de medição.</p> <p><i>KoTf2**</i> – conhecer que os constructos “comparar”, “iterar”, “acumular” e “quantificar” são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza com unidades padronizadas ou não padronizadas dessa grandeza.</p> <p><i>KoTf3*</i> – conhecer que o que se mede são as grandezas que correspondem a propriedades mensuráveis dos objetos ou fenômenos.</p> <p><i>KoTf4</i> – conhecer que as unidades de medida não padronizadas fundamentam a constituição de noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas.</p> <p><i>KoTf5</i> – conhecer que a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição.</p> <p><i>KoTf6</i> – conhecer que a unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza, ou seja, são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza.</p> <p><i>KoTf7</i> – conhecer as unidades de medida padronizadas para cada tipo de grandeza.</p> <p><i>KoTf8**</i> – conhecer que a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos que são repetidos de forma idêntica até que se obtenha determinado resultado.</p>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);"><i>Phenomenology and applications (KoTph)</i></p>	<p><i>KoTph1</i> – conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma grandeza, em termos da quantificação de uma em função da outra.</p> <p><i>KoTph2*</i> – conhecer os distintos contextos de aplicação da atividade de medir: medir comprimento, área, capacidade, massa, etc.</p>

<i>Procedures of representations (KoTmp)</i>	<p><i>KoTmp1*</i> – conhecer os procedimentos de iteração para se efetuar uma medição de qualquer grandeza: a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração.</p> <p><i>KoTmp2</i> – conhecer a característica do resultado de uma medição: uma medida é expressa por um valor numérico associado a uma marca, correspondente à unidade de medida (padronizada ou não) utilizada.</p> <p><i>KoTmp3</i> – conhecer que efetuar uma medição não corresponde a calcular uma medida, mas sim estabelecer uma relação entre duas magnitudes de uma mesma grandeza.</p> <p><i>KoTmp4</i> – conhecer a característica do resultado de uma medição: o valor numérico (v) obtido na medição é inversamente proporcional à magnitude da unidade de medida (u), quando se considera constante o todo (d) a ser medido ($v = d/u$).</p> <p><i>KoTmp5**</i> – conhecer que é condição necessária para se efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade possa ser resultante de uma composição de unidades (<i>unitizing</i>).</p> <p><i>KoTmp6</i> – conhecer que a comparação é uma condição necessária, mas não suficiente para medir.</p> <p><i>KoTmp7</i> – conhecer que uma medição pode ser efetuada utilizando unidades não padronizadas de forma não padronizada: e.g., largura da caneta para medir comprimento ou área de uma figura retangular; menor face de um prisma para medir área de uma região.</p> <p><i>KoTmp8</i> – conhecer o procedimento associado ao uso da fórmula para determinar o valor da grandeza área no caso do retângulo: efetuar o produto das magnitudes dadas em dimensões ortogonais.</p>
<i>Registers of representations (KoTrp)</i>	<p><i>KoTrp1*</i> – conhecer a nomenclatura adequada para se referir a cada uma das grandezas.</p> <p><i>KoTrp2</i> – conhecer a nomenclatura e a simbologia adequadas para se referir às unidades de medida: unidades padronizadas e não padronizadas.</p>

Fica evidente a prevalência de alguns descritores em detrimento de outros. Essas diferenças podem estar associadas, por um lado, ao fato de que a *TpF* (Ribeiro et al., 2021) não perseguia objetivos específicos associados à categoria *Registers of representation*. Por outro lado, os resultados da categoria *Phenomenology and Applications* são coerentes com estudos anteriores que identificaram seu conteúdo como o mais ausente (Gómez & Cañadas, 2016; Zakaryan & Ribeiro, 2018).

6. COMENTÁRIOS FINAIS

Descrever, entender e caracterizar o conteúdo do conhecimento especializado de um grupo de professores de diferentes etapas educativas no âmbito da Medida contribui para clarificar certas particularidades e especificidades do conhecimento do professor que ensina ou ensinará os tópicos de Medida, independentemente da etapa educativa em que atua, uma vez que, particularmente no caso do subdomínio KoT (em foco neste trabalho), tal caracterização contribui para tornarem evidentes certos elementos estruturais e estruturantes do conteúdo do conhecimento do professor. Nesse sentido, são precisamente esses elementos estruturais e estruturantes que compõem o conteúdo do conhecimento docente em relação a cada tópico matemático que nos permitem considerar que, independentemente da etapa educativa em que este profissional atue, poderá mobilizar esses conhecimentos, quando inserido em uma prática letiva qualquer.

Notemos, além disso, que essa não associação entre essas especificidades e a etapa em que o professor atua contribui para que possamos encarar a matemática elementar de um ponto de vista avançado (Klein, 1932) e vice-versa, mas também para que possamos mapear esse conhecimento especializado, numa perspectiva de descompactá-lo (Ma, 1999) e torná-lo mais acessível a outros.

Naturalmente, a busca por esse mapeamento não pretende prescrever todo o conhecimento do professor, mas almeja fornecer elementos para que o professor se paute em “ideias centrais que determinam como o conhecimento é gerado e organizado dentro da disciplina” (Schmidt et al., 2002, p. 9).

Quando nos propomos a um detalhamento do conteúdo do conhecimento do professor, importa evidenciar as características e os elementos que constituem as especificidades desse conhecimento. Nesse sentido, pautados por resultados anteriores (Policastro & Ribeiro, 2021), passamos a considerar que o conteúdo do conhecimento do professor associado à categoria *Definitions, properties and foundations* (Carrillo et al., 2018), relativamente a qualquer tópico, mas aqui, em particular, nos tópicos de Medida, deveria ser encarado em termos de suas especificidades, de forma separada, em categorias distintas. De fato, os resultados obtidos permitem identificar, em específico nas categorias *Properties* e *Foundations*, componentes do conhecimento do professor que necessitam ser desenvolvidas.

Assim, é essencial que o desenho de programas de formação considere explicitamente estes e outros resultados, com objetivo de contribuir para desenvolver o conteúdo do conhecimento do professor que lhe permita, por exemplo, conectar conceitos, propriedades e fundamentos, e, na sua prática letiva – atual ou futura –, evidenciar essas conexões dentro de um mesmo tópico e entre tópicos distintos, dando forma à estrutura da disciplina (Gamboa et al., 2020).

Para isso, é necessário um foco específico da formação, associado a tarefas desenhadas intencionalmente (Ribeiro, 2021; Ribeiro, Gibim & Alves, 2021) com a finalidade de desenvolver uma consciência das estruturas da matemática (Mason et al., 2009), do entendimento das conexões matemáticas e do conhecimento de como organizar, numa distribuição curricular, os tópicos, de modo a evidenciar essas conexões (Vale et al., 2010).

Os resultados aqui obtidos – associados aos descritores de conhecimento – contribuem, portanto, para um mais amplo entendimento do conteúdo do conhecimento do professor – aqui no âmbito do KoT, relativamente aos tópicos de Medida – e das categorias que o formam, possibilitando um olhar mais detalhado para essa componente da estrutura do conhecimento especializado. Entretanto, para que possamos continuar refletindo sobre essas componentes, algumas questões se abrem, contribuindo para guiar uma agenda de pesquisa que busque, de forma imbricada, uma relação com a formação de professores: (i) que relações ocorrem entre os descritores do conhecimento dos tópicos (KoT) de Medida e outros tópicos, como em Números e Operações?; ii) qual o papel dessas relações na composição estrutural do conhecimento do professor relativamente a esses tópicos?; iii) quais os impactos na prática letiva do professor no caso de as formações (iniciais e contínuas) objetivarem o desenvolvimento do conhecimento do professor associado a essas estruturas matemáticas?; v) de que forma as especificidades do conhecimento do professor se vão desenvolvendo ao longo do tempo, pela participação em contextos formativos que têm essa intencionalidade?

REFERÊNCIAS

- Ainsworth, S. (2006). A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183–198. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001>
- Barrett, J. E., Cullen, C., Sarama, J., Clements, D. H., Klanderma, D., Miller, A. L., & Rumsey, C. (2011). Children's unit concepts in measurement: A teaching experiment spanning grades 2 through 5. *ZDM, 43*(5), 637-650. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0368-8>
- Barrett, J. E., Sarama, J., Clements, D. H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C., & Klanderma, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning, 14*, 28–54. <https://doi.org/10.1080/10986065.2012.625075>
- Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics, 31*(3), 235–268. <https://doi.org/10.1007/BF00376322>
- Berka, K. (1983). *Measurement: its concepts, theories and problems* (Vol. 72). Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-7828-7>

- Boyd, D. J., Grossman, P. L., Lankford, H., Loeb, S., & Wyckoff, J. (2009). Teacher preparation and student achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 31*(4), 416–440. <https://doi.org/10.3102/0162373709353129>
- Bragg, P., & Outhred, L. (2004). A measure of rulers—The importance of units in a measure. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 159–166. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489702.pdf>
- Caldatto, M. E., Fiorentini, D. & Pavanello, R. M. (2018). Uma análise do Projeto de formação profissional de professores privilegiada pelo PROFMAT. *Zetetiké, 26*, 260–281. <https://doi.org/10.20396/zet.v26i2.8651034>
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–256. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Charalambous, C. Y. (2015). Working at the intersection of teacher knowledge, teacher beliefs, and teaching practice: A multiple-case study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*, 427–445. <https://doi.org/10.1007/s10857-015-9318-7>
- Charles, R. I. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school Mathematics. *Journal of Mathematics Education Leadership, 7*(3), 9–24. https://jaymctighe.com/wp-content/uploads/2011/04/MATH-Big-Ideas_NCSM_Spr05v73p9-24.pdf
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. Em F. K. Lester (Org.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 461–555). Information Age Publishing.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early Math: The learning trajectory approach*. Routledge.
- Clements, D., & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. Em D. Clements, J. Sarama & A.-M. DiBiase (Orgs.), *Engaging young children in mathematics: standards for early childhood mathematics education* (pp. 299–317).
- Di Bernardo, R., Policastro, M., Almeida, A. R. de, Ribeiro, M., Melo, J. M. de, & Aiub, M. (2018). Conhecimento matemático especializado de professores da educação infantil e anos iniciais: Conexões em medidas. *Cadernos Cenpec, 8*(1), 98–124. <http://dx.doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v8i1.391>
- Gamboa, G., Badillo, E., Ribeiro, M., Montes, M., & Sánchez-Matamoros, G. (2020). The role of teachers' knowledge in the use of learning opportunities triggered by mathematical connections. In S. Zehetmeier, D. Potari, & M. Ribeiro, *Professional development and knowledge of Mathematics teachers* (1ª ed., pp. 24–43). Routledge.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2002). Magnitudes y medida. Em *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. (p. 611–654). Universidad de Granada, Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología.
- Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(3), 311–334. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1933>
- Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measurement concepts? *The Arithmetic Teacher, 31*(7), 19–24. <http://www.jstor.org/stable/41192320>
- Hill, H. C., & Chin, M. (2018). Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes. *American Educational Research Journal, 55*(5), 1076–1112. <https://doi.org/10.3102/000283121876961>

- Ho, A., & McMaster, H. (2019). Is 'capacity' volume? Understandings of 11 to 12-year-old children. Em G. Hine, S. Blackley & A. Cooke (eds.), *Mathematics Education research: Impacting practice (Proceedings of the 42nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 356–363). MERGA. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED604312.pdf>
- Irwin, K. C., Ell, F. R., & Vistro-Yu, C. P. (2004). Understanding linear measurement: A comparison of Filipino and New Zealand children. *Mathematics Education Research Journal*, 16(2), 3–24. <https://doi.org/10.1007/BF03217393>
- Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis* (3^a ed., Vol. 1). Macmillan.
- Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. (2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. *Learning and Teaching Measurement*, 1, 100–121.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary Mathematics: Teacher's understanding of fundamental Mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 219–248. <http://www.jstor.org/stable/3482837>
- Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10–32. <https://doi.org/10.1007/BF03217543>
- Ministério da Educação (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics—National Council of Teacher of Mathematics*. Reston, VA.
- Norton, A., & Boyce, S. (2015). Provoking the construction of a structure for coordinating n+1 levels of units. *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 211–232. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.006>
- Organisation for Economic Co-operation and Development (2010). *PISA 2009 results: What students know and can do. Student performance in reading, mathematics, and science* (Vol. 1). OECD.
- Pape, S., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice*, 40(2), 118–127. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4002_6
- Panorkou, N. (2020). Dynamic measurement reasoning for area and volume. *For the Learning of Mathematics*, 40(3), 9–13. <https://www.jstor.org/stable/27091164>
- Panorkou, N. (2021). Exploring students' dynamic measurement reasoning about right prisms and cylinders. *Cognition and Instruction*, 1–35. <https://doi.org/10.1080/07370008.2021.1958218>
- Passalague, D., & Munier, V. (2015). Schoolteacher trainees' difficulties about the concepts of attribute and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 89, 307–336. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9610-6>
- PolICASTRO, M. S., Almeida, A. R., & Ribeiro, M. (2017). Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa. *Revista Espaço Plural*, 36(1), 123–154. <https://e-revista.unioeste.br/index.php/espacoplural/article/view/19714>
- PolICASTRO, M. S., Almeida, A. R., Ribeiro, M., & Jakobsen, A. (2020). Kindergarten teacher's knowledge to support a mathematical discussion with pupils on measurement strategies and procedures. In M. Carlsen, I. Erfjord, & P. S. Hundeland. *Mathematics education in early years* (pp. 263–279). Springer.
- PolICASTRO, M. S., & Ribeiro, M. (2021). Conhecimento especializado do professor que ensina matemática relativo ao tópico de divisão. *Zetetiké*, 29, 1–24. <https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661906>
- Ribeiro, M., Almeida, A. R. de, & Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(35), 1–32. <https://doi.org/1046312/pem.v14i35.13263>

- Ribeiro, M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(1), 93–121. <https://www.redalyc.org/journal/335/33523151005/html/>
- Ribeiro, M., Gibim, G., & Alves, C. (2021). A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: Discussão de tarefas para a formação e o desenvolvimento do conhecimento interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(34), 1–24. <https://doi.org/10.46312/pem.v14i34.12686>
- Ribeiro, M., Jakobsen, A., & Mellone, M. (2018). Secondary prospective teachers' interpretative knowledge in a measurement situation. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter, *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 35–42). PME.
- Ribeiro, M., & Policastro, M. (2021). *As medidas e as especificidades do conhecimento do professor para que os alunos aprendam Matemática com significado* (1.ª ed., vol. 2). CRV.
- Sarama, J., Clements, D. H., Barret, J., Van Dine, D. W., & MacDonel, J. S. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *ZDM Mathematics Education*, 43, 667–680. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0326-5>
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2017). What makes Mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1–20. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Schmidt, W., Houang, R., & Cogan, L. (2002). A coherent curriculum. *American Educator*, Summer, 1–18. <https://www.math.mun.ca/~hsgaskill/refs/curriculum.pdf>
- Smith, J. P., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Teppo, A. R. (2011). Learning, teaching, and using measurement: Introduction to the issue. *ZDM Mathematics Education*, 43(5), 617–620. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0369-7>
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. (1.ª ed.). Sage Publications.
- Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(3), 237–295. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(03\)00022-1](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00022-1)
- Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. Em D. H. Clements & G. Bright (eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 yearbook* (pp. 3–16). National Council of Teachers of Mathematics.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1994). *Grounded theory methodology: An overview*. Sage Publications.
- Subramaniam, K. (2014). Prospective secondary mathematics teachers' pedagogical knowledge for teaching the estimation of length measurements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 177–198. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9255-2>
- Szilagyi, J., Clements, D. H., & Sarama, J. (2013). young children's understandings of length measurement: Evaluating a learning trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(3), 581–620. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.44.3.0581>
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Vale, C., McAndrew, A., & Krishnan, S. (2010). Connecting with the horizon: Developing teachers' appreciation of mathematical structure. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 193–212. <https://doi.org/10.1007/s10857-010-9162-8>
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Elia, I. (2011). Kindergartners' performance in length measurement and the effect of picture book reading. *ZDM Mathematics Education*, 43(5), 621–635. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0331-8>

- Venturi, G. (2014). Foundation of Mathematics between theory and practice. *Philosophia Scientiæ*, 18(1), 45–80. <https://doi.org/10.4000/philosophiascientiæ.912>
- Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Em D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Springer.
- Vysotskaya, E., Lobanova, A., Rekhman, I., & Yanishevskaya, M. (2020). The challenge of proportion: Does it require rethinking of the measurement paradigm? *Educational Studies in Mathematics*, 106, 429–446. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09987-8>
- Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the Learning of Mathematics*, 22(3), 14–17. <https://www.jstor.org/stable/40248396>
- Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2018). Mathematics teachers' specialized knowledge: A secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, 21(3), 1–19. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1525422>
- Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317–346. <https://www.jstor.org/stable/30035043>
- Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131–148. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7>

Autores

Milena Policastro. Universidad Estatal de Campinas, Brasil. mitapolicastro@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0003-2437-2557>

Miguel Ribeiro. Universidad Estatal de Campinas, Brasil. cmribas78@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0003-3505-4431>