CRÍTICA. Revista Hispanoamericana de Filosofía. Vol. 55, No. 164 (agosto 2023): 57–91

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2023.1424

PUREZA DEL MÉTODO Y CONSTRUCCIÓN DE TEORÍAS: EL CASO DE KRONECKER Y DEDEKIND EN TEORÍA ALGEBRAICA DE NÚMEROS

GUILLERMO NIGRO PUENTE
IPA (ANEP), Uruguay
UFBA, Brasil
guillenigropuente@gmail.com
https://orcid.org/0009-0008-8075-6129

RESUMEN: La discusión sobre pureza del método suele enfatizar el estudio de demostraciones *particulares* de la práctica matemática. Una crítica a esta posición cuestiona el valor de la pureza al afirmar que el "progreso matemático" depende esencialmente del empleo de métodos impuros. Este artículo muestra que una perspectiva más *holística*, centrada en cómo las demandas de pureza pueden operar en la construcción de teorías *autónomas*, permite identificar un contexto donde la pureza del método adquiere valor en la práctica matemática. En particular, se muestra la relevancia de tales demandas en el caso de las teorías algebraicas de números de Kronecker y Dedekind.

PALABRAS CLAVE: teorías autónomas, progreso matemático, concepción holística de la pureza del método, aritmetización, matemática pura

SUMMARY: The discussion of purity of method usually emphasizes the study of *particular* proofs of mathematical practice. A critique of this position questions the value of purity by claiming that "mathematical progress" depends essentially on the use of impure methods. This article shows that a more *holistic* perspective, focusing on how purity claims can operate in the construction of *autonomous* theories, allows us to identify a context where purity of method acquires value in mathematical practice. In particular, the relevance of such demands is shown in the case of Kronecker's and Dedekind's algebraic number theories.

KEY WORDS: autonomous theories, mathematical progress, holistic conception of the purity of the method, arithmetization, pure mathematics

El siglo XIX atestigua una explosión demográfica en el mapa de las disciplinas matemáticas: las geometrías no euclidianas, la topología, la teoría de números, la teoría de conjuntos, son sólo algunos ejemplos de este fenómeno. Una característica observable de estos procesos de formación y consolidación de nuevas disciplinas matemáticas consiste en la alternancia entre un periodo de *expansión* de nuevos resultados y uno de *unificación* disciplinar. El primero se caracteriza por emplear una *pluralidad* de métodos provenientes de diversos ámbitos; el segundo se caracteriza por la construcción de *teorías*, consolidando así el estatus de "disciplina autónoma" mediante una reconfiguración interna y proyección de nuevos problemas y futuras investigaciones.

Mario Pieri describe de esta manera el "movimiento reciente" (decimonónico) de las matemáticas (1901, p. 369). Más exactamente, clasifica los periodos de expansión como un "progreso extensivo", en el que se obtienen "nuevas verdades que aumentan el dominio de tal o cual ciencia y abren nuevas ramas del conocimiento". El periodo de unificación es clasificado por Pieri como un "progreso intensivo", el cual es "resultado de una revolución interior en los hechos [*faits*] ya adquiridos, a raíz de la cual aparecen en un aspecto nuevo e imprevisto, [...], de la que nacen los criterios y los esquemas de clasificación".[1] En palabras modernas, el desarrollo "intensivo" concierne a la investigación en fundamentos, a partir de una acumulación previa de resultados, métodos, conjeturas, etc., es decir, a partir de lo que Corry denomina un "cuerpo de conocimiento" (2004, pp. 3 y ss). Por su parte, el desarrollo "extensivo" consiste en una ampliación del cuerpo de conocimiento, el cual no supone por sí mismo la construcción de nuevas teorías.

La actual discusión sobre pureza del método parece estar enmarcada dentro del "progreso extensivo". En efecto, esta es usualmente caracterizada con relación a las demostraciones o soluciones *particulares* en la que tales métodos son empleados: una demostración es pura cuando los recursos empleados en ella son "intrínsecos" al contenido del teorema (*v.g.* Detlefsen 2008, Detlefsen y Arana 2011, Arana 2008, 2014, 2017, 2022, Arana y Mancosu 2012, Baldwin 2013). En este sentido, se trata de una noción *local* de pureza, pues la misma concierne a la clasificación de demostraciones particulares. Esta concepción se enfrenta a las dudas de Kreisel (1980, p. 167) y Cellucci (2017, p. 299), de acuerdo con las cuales la pluralidad de métodos (el empleo de métodos *impuros*) parece ser clave para la obtención de nuevos resultados y, con ello, para el "progreso" en matemáticas (*cfr.* Hilbert 1898/1899, p. 236). Ejemplos elocuentes son el empleo de métodos analíticos en teoría de números (*v.g.* la función ζ de Riemann), o el empleo del álgebra en geometría (geometría analítica y algebraica).

Una característica saliente de las prácticas de formación de teorías en la matemática moderna atañe a la selección de sus métodos. Según Ferreirós, el objetivo es "seleccionar los métodos que se consideren más apropiados y pertinentes para un contenido [*subject matter*] determinado", a efectos de reelaborar sistemáticamente un cuerpo de

[1] Todas las traducciones son mías.

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2023.1424

conocimiento para desarrollarlo de acuerdo con ese enfoque (2015, p. 32). Esta observación permite conectar la pureza del método con la formación de teorías: cuando la selección de los métodos está *restringida* por su fidelidad al contenido de la teoría, lo que tenemos es una restricción purista. Así pues, la perspectiva sobre la pureza del método que explora este artículo es más *holística* que la usual, pues atañe a las teorías mismas a las que tal o cual demostración "pertenece".

En este artículo argumento que la cuestión de la "adecuación" o "pureza" del método en la teoría algebraica de números de Kronecker y Dedekind estuvo estrechamente relacionada con sus programas aritmetizadores, al tiempo que también responde a una preocupación por construir teorías que unificaran, en una teoría, la pluralidad de métodos algebraicos y analíticos típico del desarrollo extensivo de la teoría de las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (Goldstein y Schappacher 2007a y b).[2] Esto muestra que las dudas de Kreisel y Cellucci consideran periodos de desarrollo extensivo, pero son *compatibles* con el interés por la pureza dentro del progreso *intensivo*. Resulta interesante destacar que tanto Kronecker como Dedekind hayan estado comprometidos con la pureza del método, pues ellos representan uno de los grandes antagonismos metodológicos en las matemáticas del siglo XIX: ambos compartieron la preocupación por ofrecer una fundamentación "puramente aritmética" de la matemática pura, y entendieron que tal tarea suponía asumir una demanda purista para alcanzar sus respectivos objetivos aritmetizadores. Sin embargo, su discrepancia sobre el significado de "aritmético" afectó su clasificación de los métodos "adecuados" (puros) para sus proyectos aritmetizadores.

El artículo se organiza de la siguiente manera: la sección 1 resume esquemáticamente la expansión de la teoría de números de las *Disquisitiones*, gracias al empleo de una pluralidad de métodos "impuros". También explica la relación entre construcción de teorías y pureza del método, y se distinguen dos "imágenes de las matemáticas" que conceptualizan de forma distinta la unidad disciplinar (la imagen "orgánica" y la imagen "arquitectónica"). La sección 2 aborda el caso de Kronecker, mientras que la sección 3 aborda el caso de Dedekind. Finalmente, en la sección 4 reconsidero brevemente la mencionada crítica de Kreisel y Cellucci.

[2] La importancia de las contribuciones de Kronecker y Dedekind en teoría algebraica de números representan un punto de inflexión en el desarrollo decimonónico de la disciplina. Tal como sostiene Hilbert, ellos (junto con Kummer) proveyeron la "teoría actual" (1897, p. VIII).

1. *Expansión y construcción de teorías en la teoría de números decimonónica*

Las *Disquisitiones* de Gauss tuvieron la pretensión de elevar la teoría de los números ("aritmética superior") a un verdadero sistema, una ciencia rigurosa y bien ordenada que se ocupa esencialmente de la teoría de las congruencias y las formas (fundamentalmente cuadráticas binarias). En otras palabras, Gauss pretendía hacer de la teoría de números una disciplina autónoma. Esto se aprecia ya en el "Prefacio" de la obra, donde Gauss se encarga de diferenciar la aritmética superior de la "aritmética elemental" y del análisis. Sin embargo, durante los siguientes cincuenta años la teoría de las *Disquisitiones* sufrió una expansión considerable en cuanto a resultados y métodos que, a juicio de Hilbert, representó un periodo de avance "errático", hasta que Kronecker y Dedekind organizaron la disciplina en torno a lo que hoy denominamos "teoría algebraica de números", convirtiendo esta última en la "esencia" de la teoría de números (1897, p. IX). Esta expansión procedió bajo la constante de una pluralidad de métodos que vincularon la aritmética superior con el álgebra y el análisis superior (complejo). En su monografía sobre las leyes de reciprocidad —una cuestión seña de identidad de las *Disquisitiones* y la teoría de números—, Kummer sintetiza esta expansión del siguiente modo:

> [*las leyes de reciprocidad*] abren el camino para posteriores y más profundas investigaciones aritméticas. [éstas] son de gran importancia para la teoría de números, pero han adquirido una importancia aun mayor en el desarrollo histórico de esta disciplina matemática, ya que las demostraciones de las mismas, [. . .], han tenido que ser *extraídas casi siempre de áreas nuevas*, hasta ahora inexploradas, que se han abierto así a la ciencia. (1859, p. 19; las cursivas son mías.)[3]

La pluralidad metodológica de las demostraciones de las leyes de reciprocidad es explicada por Kummer como el producto de que las mismas hayan tenido que "ser extraídas casi siempre de áreas nuevas". Esta pluralidad reviste dos características importantes para este trabajo: por un lado, ocurre en un contexto de "progreso extensivo"; por otro lado, representa una suerte de hegemonía de métodos impuros. Esta pluralidad, entonces, consiste en emplear conceptos y técnicas pertenecientes a distintas áreas matemáticas, reconocidas por los matemáticos de la época como "ajenas" o "distantes" entre sí.[4]

[3] *Cfr.* p. 24 de la misma obra.

[4] Testimonios de este reconocimiento pueden consultarse, por ejemplo, en el "Prefacio" y art. 335 de las *Disquisitiones* de Gauss, así como en su carta a Bessel

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2023.1424

La demostración de Dirichlet del teorema sobre la infinitud de números primos de la forma $a + n \cdot b$ con a y b primos entre sí (1837), es un ejemplo clásico de la pluralidad metodológica señalada. El punto es que el empleo de ciertas funciones del análisis (llamadas *series-L*) se presentaba como indispensable; luego, un resultado sobre números finitos sólo podía obtenerse mediante un rodeo a través del cálculo infinitesimal, pues la infinitud de los primos quedaba demostrada por el carácter armónico del logaritmo de ciertas *series-L*, cuando la parte real de su variable $s > 1$ tiende a 1, a la vez que la serie no converge a 0 cuando $s = 1$. La demostración en Dirichlet (1837) era completa sólo en el caso en que b es un primo; para probar el caso general Dirichlet tuvo que asumir su fórmula del número de clases, que demostró en un artículo de 1839–1840 (1840).[5] Esto es notable, pues agrega otra conexión entre análisis y teoría de números: este resultado está fundamentalmente ligado a la teoría del *género principal* de formas cuadráticas (binarias) con discriminante negativo y, con ello, a un teorema capital para la disciplina: el *teorema de reciprocidad cuadrática*.[6] Así, un resultado sobre números primos dependía de un "fenómeno analítico": los ceros de ciertas funciones. Dirichlet era consciente de la impureza de su demostración, pues esta "no es puramente aritmética, sino que se basa en parte en la consideración de cantidades que varían continuamente" (1837, p. 316). No obstante, Dirichlet creía que un "estudio profundo del análisis matemático permite descubrir relaciones ocultas entre lo que parecen ser cuestiones completamente dispares" (1840, p. 536).

Este desarrollo extensivo generó dudas sobre la *unidad disciplinar* de la aritmética superior. A este respecto, Goldstein y Schappacher afirman que en este periodo de recepción de las *Disquisitiones*, no encontramos aquí una disciplina en torno a la teoría de números, pues la

> [. . .] (meta)estabilidad de las prácticas no estaba garantizada por ninguna *unicidad de propósito o de concepto* (los matemáticos individuales

del 18 de diciembre de 1811 (Gauss 1917, p. 366, Gauss 1831, pp. 170–171, Gauss 1849, p. 114, Gauss 1818, p. 496), así como su comentario en el prefacio a Eisenstein (1847, pp. III–IV). Véanse también Dirichlet 1837 (p. 316), Dirichlet 1838 (p. 360), Dirichlet 1842 (p. 536), así como el comentario de Kummer (1860, p. 327) sobre la unidad de las matemáticas en Dirichlet. Jacobi 1891 (p. 375), Eisenstein 1845 (pp. 121, 127–128), Eisenstein 1844 (pp. 223, 245), Eisenstein 1975 (p. 793). Finalmente, véase además Kronecker 1857 (p. 181).

[5] Davenport 2013, pp. 1 y ss.

[6] Véanse Lemmermeyer 2007 y 2013.

> podían tener sus propias prioridades, mezclar de forma diferente los recursos disponibles, o despreciar algunos de ellos), ni por una *fusión en un dominio* ["disciplina" en Goldstein y Schappacher (2007a, p. 54)] *más amplio*, sino por una circulación constante de una rama a otra, un reciclaje de resultados e innovaciones. (2007a, p. 58; las cursivas son mías.)

Los autores prefieren hablar de "campo de investigación" [*research field*] en vez de "disciplina" ("dominio" en la cita) para caracterizar este desarrollo expansivo. De acuerdo con ellos, la distinción entre "campo de investigación" y "disciplina" radica en que lo primero describe la actividad de los involucrados a partir de aspectos "sociológicos" o "externos" (Goldstein y Schappacher 2007a, p. 52),[7] mientras que lo segundo involucra aspectos "internos", o un "sistema de actividades académicas orientado a objetos" —*i.e.*, orientado a contenidos conceptuales, métodos demostrativos, tipos de sistematización y valores comunes abocados a la evaluación de esos resultados (2007a, p. 54, y n. 184)—. Este periodo de expansión a partir de las *Disquisitiones* cae bajo la categoría de "campo" debido a que buena parte de la unidad descansa sobre elementos externos, como la comunicación entre matemáticos, ya sea a través de cartas, o artículos (2007a, p. 52). En este contexto, la unidad obedecía a una red de interconexiones entre los participantes del campo, aun cuando estos podían tener "sus propias prioridades, mezclar de forma diferente los recursos disponibles, o despreciar algunos de ellos". Lo que no encontramos aquí es una "unicidad de propósito o de concepto" propio de una disciplina, esto es, la fusión en un "dominio" conceptual, técnico, etc. (2007a, p. 54, y n. 184).[8]

Los autores denominan "análisis aritmético algebraico" a este campo de investigación; en la terminología de Corry diríamos: los tres cuerpos de conocimiento (análisis, aritmética y álgebra) interactúan entre sí (2004). Distinguir entre "campo de investigación" y "disciplina" puede resultar conceptualmente huidizo, pero el punto radica en cómo se entiende la "unidad", "ligazón" o "asociación" de esa multiplicidad de prácticas y cuerpos de conocimiento. La unidad "interna" puede ponerse de manifiesto (o bien elaborarse) por medio de una sistematización *total*, —*i.e.*, por medio de la construcción de una teoría (Ferreirós 2016, p. 197)—. A tales efectos, tendríamos

[7] Los autores remiten al concepto de "campo" en Bourdieu 2002 (especialmente pp. 115–116).

[8] *Cfr.* el modelo de formación de disciplinas en tres etapas de Guntau y Laitko (1987).

que "congelar" una práctica en un cuerpo de teorías fijo, y así reelaborar esos cuerpos teóricos unificando conceptos y métodos. Es en ese "congelamiento" donde delimitamos el *contenido (o tópico)* de la disciplina a ser sistematizada, seleccionando los conceptos que son importantes en su rol unificador (*v.g.* cuerpo numérico) y, acerca de los cuales trata la teoría. De este modo, un incentivo para la construcción de teorías consiste en ofrecer un marco conceptual que unifique, en una disciplina, una multiplicidad preexistente de prácticas matemáticas cuya ligazón es opaca, conjetural o de un carácter fundamentalmente "externo". El tipo de unificación conceptual que, según se verá luego, motiva las demandas de pureza metodológica, se adecua más a la unidad "interna" de una disciplina que a la unidad "externa" de un campo. El caso es que la emergencia de la teoría algebraica de números como una disciplina *autónoma* dentro de las matemáticas se adapta bastante bien a esta descripción. Esta idea de "autonomía" de una teoría será muy importante en las próximas secciones, pues esta característica está fuertemente ligada a la pureza del método, tal como se observará en las secciones 2 y 3. En efecto, el surgimiento de la teoría algebraica de números como disciplina autónoma estuvo vinculado a las demandas puristas de Kronecker y Dedekind.[9]

El interés por la conexión entre cuestiones "completamente dispares" (Dirichlet 1842, p. 536) estimuló muchas reflexiones sobre los fundamentos de las matemáticas. En efecto, parece natural pensar que la preocupación por la unidad disciplinar motivó una investigación intensiva, que reorganice el campo en una disciplina. Este interés era típico de la Alemania decimonónica, aunque su cristalización en objetivos matemáticos concretos no ocurrió de modo unívoco. Aquí cabe distinguir tres planos: por un lado, una suerte de "imagen" —en el sentido de Corry (2004)— de la unidad disciplinar que ofrece una guía "estructural" acerca de la unidad de una disciplina particular, o de las matemáticas en su conjunto; en segundo lugar, una demanda *metodológica* que orienta la actividad sistematizadora, y que puede ser o no un reflejo de esa imagen. Aquí se pueden localizar las demandas de pureza. Finalmente, un programa cuyas consignas operacionalizan esas demandas transformándolas en objetivos matemáticos, *v.g.* en un programa aritmetizador. En las secciones 2 y 3

[9] Naturalmente, esto no impide que ocurran diversos desarrollos extensivos a partir de una sistematización. La teoría de cuerpos de clases es un ejemplo de desarrollo extensivo en teoría algebraica de números a partir de la sistematización de Hilbert (1897).

desarrollaré estos planos en Kronecker y Dedekind, pero antes de finalizar esta sección conviene introducir algunas generalidades sobre ellos. Respecto del primero, cabe discriminar entre dos tendencias relevantes: una orientada hacia una imagen “orgánica” y otra orientada hacia una imagen “arquitectónica”.

De acuerdo con la imagen “orgánica” las matemáticas se presentan como un *organismo vivo* cuyas partes están holísticamente interconectadas, y donde la pluralidad de métodos resulta natural.[10] Las teorías que reflejan esta condición se parecen, a decir de Kummer, más a un “sistema del universo” [*ein dem Weltsysteme ähnlichere*] que a un mero ordenamiento lógico lineal, cuya tarea será, “yendo más allá de la mera justificación de las verdades matemáticas, dar un conocimiento completo de las relaciones esenciales de las mismas entre sí”.[11,12] Además de Kummer, otros representantes ilustres de esta tendencia son Dirichlet, Cantor, Klein, Riemann eventualmente y, como se verá en la próxima sección, también Kronecker.[13]

De acuerdo con la imagen “arquitectónica”, por otra parte, las matemáticas son un sistema teórico (o una colección de ellos), los cuales se organizan de forma análoga a un *edificio* construido a partir de una cimentación sólida. Esta tendencia destaca la homogeneidad del método y la organización de las teorías como un sistema lógico. Tal como cabe esperar, una teoría construida fielmente a esta imagen prioriza el orden lógico en el desarrollo de la misma, siendo la idea de sistema axiomático formal una realización sumamente sofisticada de esta imagen. Aquí encontramos, por ejemplo, a Gauss, Martin Ohm, Karl Weierstrass, Hilbert y, como se verá en la sección 3, también a Dedekind.[14] El punto es que ambas tendencias permiten ofrecer, en

[10] En cuanto a lo específicamente estructural, este tipo de teorías se asemejan a una “red”. Véase a este respecto Rescher 2003, pp. 118 y ss.

[11] Véase Kummer 1975, p. 697. He traducido el plural *Weltsysteme* por el singular “sistema del universo” para conservar la concordancia de número que se aprecia en el contexto. La cita también es recogida en Goldstein y Schappacher 2007a (p. 18, n. 55), donde los autores traducen de forma similar.

[12] Esta concepción “orgánica” de las matemáticas en Kummer puede ser explicada como resultado de la influencia de Hegel (atestiguada por Kronecker en Boniface y Schappacher 2001, p. 233). Esta metáfora sería adoptada por Hegel gracias a la influencia de Wilhelm Schlegel, quien en su *Vorlesungen über Enzyklopädie* de 1803, compara la imagen orgánica con la imagen arquitectónica y una metáfora “cartográfica”, dándole prioridad a la primera (véase Stichweh 1984, p. 13).

[13] Véase Dirichlet 1842 (p. 536), Cantor 1883 (§5) y Klein 2016 (p. 2), así como Klein 1979 (pp. 3–5). Respecto de Riemann, véase la sección 3.

[14] Véase Von Waltershausen 1856 (p. 97) (*cfr.* Goldstein y Schappacher 2007a, p. 17), Ohm 1842 (pp. III–IV), Weierstrass 1924 (así como Dugac 1973, §3.3, Apéndices I y II) y Hilbert 1970.

términos generales, una manera de entender la *unidad* de la teoría de números (y de las matemáticas).[15] En rigor, la imagen orgánica ofrece una idea más natural de la unidad que la imagen arquitectónica; ésta conduce a pensar que cada edificio teórico es *autónomo* de los demás; luego, esta imagen favorece la "especialización" disciplinar y la *des*-unión de las matemáticas. Resulta notable, sin embargo, que un partidario de esta metáfora como Hilbert, haya tenido una seria preocupación por la unidad *orgánica* de las matemáticas.[16]

Estas consideraciones tienen un correlato en el segundo plano: la imagen orgánica parece ser más "fiel" a la pluralidad metodológica y, por lo tanto, mantiene *a priori* una relación más intrincada con la pureza del método.[17] Esto no ocurre con la imagen arquitectónica; en efecto, resulta bastante natural asociarla con una unidad disciplinar basada en la pureza metodológica: la selección de los métodos apunta a no introducir ningún contenido conceptual que "deforme" los cimientos, pues, de ocurrir, no podría afirmarse que la teoría unifica por medio de la autonomía. Sin embargo, la selección de esa base no puede sostenerse en ausencia de un cierto preconcepto —basado o no en argumentos convincentes— de lo que es "intrínseco" o "ajeno" a la pretendida disciplina. Alternativamente, podría pensarse que una teorización se *propone* ella misma como una suerte de argumento en favor de la autonomía disciplinar. Es esto lo que podemos apreciar en Kronecker y Dedekind, como se verá más adelante.

Ninguno de los anteriores planos arroja un programa matemático concreto, pues se trata de planos muy "filosóficos". Es aquí donde podemos conectar las demandas de pureza con los programas de aritmetización, pues aun tratándose de programas "filosóficos", admiten una lectura más directa en términos de objetivos matemáticos. Dirichlet, por ejemplo, habría sido partidario de que cualquier resultado del álgebra o del análisis, por complejo o aparentemente *remoto* que fuera, podía reformularse puramente como un teorema sobre los números

[15] Agradezco a José Ferreirós llamarme la atención sobre estas tendencias en una comunicación personal.

[16] Los últimos tres párrafos de su célebre *Problemas de las matemáticas* (Hilbert 1902) ponen de manifiesto la profunda preocupación de Hilbert sobre la dispersión de las matemáticas. Resulta significativo que Hilbert se refiera a la unidad de las matemáticas en términos *orgánicos*: "[l]a ciencia matemática es [. . .] un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada a la conexión de sus partes" (1902, p. 478). *Cfr.* Weyl 1944, p. 617. Nótese que la "vitalidad" a la que Hilbert hace referencia depende del desarrollo *extensivo* de las matemáticas.

[17] Digo "intricada" y no "ausente" debido a que Kummer destacaba la importancia de la pureza metodológica en la actividad sistematizadora. Véase Kummer 1839, p. 103.

naturales (la fuente aquí es Dedekind 1888, p. 338). Esta enunciación vaga necesita, para traducirse en un programa matemático, considerar si por "número" y "aritmético", por ejemplo, se entiende a los naturales o los enteros algebraicos. Este es su aspecto conceptual. Al mismo tiempo, también necesita determinar los resultados que al ser obtenidos marcarían el éxito del programa; por ejemplo, definir los números reales a partir de los racionales, o demostrar el teorema del punto de acumulación, sin recurrir a nociones geométricas. Este es un aspecto más "doctrinal". Un punto importante de las próximas secciones consiste en que los programas de aritmetización de Kronecker y Dedekind *operacionalizan* demandas de pureza, las cuales se diferencian sustantivamente con arreglo a lo que ambos matemáticos entendían por "aritmético". En otras palabras, difieren en relación con el *contenido* de la teoría de números.

2. *Kronecker: de la imagen orgánica a la pureza del método*

Kronecker adhirió e incluso radicalizó la imagen orgánica de las matemáticas. Sin embargo, cuando consideramos su proyecto sobre fundamentos de las matemáticas, el cual impulsó la creación de su "Aritmética General" [*Allgemeine Arithmetik*], podemos apreciar la entrada en escena de la imagen arquitectónica. Es aquí donde encontramos su demanda purista; por último, también puede afirmarse que su programa aritmetizador la operacionaliza, aunque no sería correcto *identificar* una cosa con la otra. Estos tres puntos son los que se desarrollan en esta sección. Buena parte de la doctrina purista de Kronecker fue formulada en el artículo "Sobre el concepto de número", publicado en la revista de *Crelle* en 1887 (Kronecker 1887b) y, sobre todo, en el último curso que Kronecker impartió en Berlín durante el semestre de verano de 1891. Me apoyaré sustantivamente en este último texto publicado en Boniface y Schappacher 2001.

A efectos de desarrollar los tres puntos debemos considerar cuatro tesis que Kronecker expone en su curso de 1891.

> **Tesis primera**: la disciplina [*Disziplin*] matemática no tolera la sistematización (Boniface y Schappacher 2001, p. 232).
>
> **Tesis segunda**: las matemáticas son una ciencia natural (Boniface y Schappacher 2001, p. 232).[18]
>
> **Tesis tercera**: a la hora de investigar los conceptos básicos de las matemáticas [*i.e.*, sus fundamentos], las distintas

[18] *Cfr.* Kronecker 1901 (p. 65).

> disciplinas matemáticas deben separarse entre sí de la forma más estricta posible (Boniface y Schappacher 2001, p. 233).
>
> **Tesis cuarta**: a efectos de investigar en los conceptos básicos hay que utilizar el método propio de cada disciplina para definirlos y, además, consultar todo el rico contenido de la ciencia para aclararlos. Porque un constructor sensato, cuando tiene que poner unos cimientos, primero se informará cuidadosamente sobre el edificio al que va a servir de base. Además, es una insensatez cerrarse a la convicción de que cuanto más rico es el desarrollo de una ciencia, surge la necesidad de cambiar los conceptos y principios en los que se basa (Boniface y Schappacher 2001, p. 233).

Sobre la base de la tesis tercera, la tesis cuarta introduce explícitamente una demanda de pureza del método; por otra parte, la tesis primera manifiesta el compromiso de Kronecker con la imagen orgánica de las matemáticas. Por último, la tesis segunda introduce el corazón de la epistemología de Kronecker. Nótese que las tesis primera y tercera parecen contradecirse, pero se verá que este no es el caso. Por otra parte, la tesis segunda contribuye en dos sentidos: afecta la manera en que se construyen las teorías matemáticas, a la vez que funge de peldaño para la tesis tercera, debido a que la separación "estricta" entre disciplinas supone aislar un "fenómeno" (Kronecker se concentra en el fenómeno aritmético). En lo que resta de esta sección se explica cada tesis destacando cómo las mismas apoyan los tres puntos introducidos al principio de la sección.

Tesis primera. Kronecker consideraba que la expansión de la teoría de las *Disquisitiones* involucró un tránsito entre distintos cuerpos teóricos (la aritmética, el álgebra y el análisis), los cuales caracteriza como conceptualmente distintos (ajenos entre sí), pero heurísticamente relacionados.[19] En referencia al "Prefacio" de las *Disquisitiones*, Kronecker observa que Gauss se precipitó al querer delimitar el contenido de la teoría de números a los enteros, pues la "delimitación del campo de una ciencia no se puede dar bien en absoluto, mientras se desarrolle cada vez más, y con ello amplíe orgánicamente [*organisch*] su campo" (1901, p. 2). Así pues, la delimitación estricta de la

[19] Véanse Kronecker 1882 (pp. 245–246), y Kronecker 1897 (pp. 3–11, 181, 213). Véanse también las primeras secciones de Kronecker 1901, así como las observaciones de Hensel en el *Vorwort* a Kronecker 1901 (pp. VII–VIII), y Goldstein y Schappacher 2007a (§3.4)

teoría de números con el álgebra y el análisis resulta imposible (1901, p. 3), por lo que sólo en "cada caso individual, el sentido matemático del tacto debe decidir si el asunto en cuestión debe asignarse a la aritmética, al álgebra o al análisis" (1901, p. 5). Esta posición queda expresada de modo general en la tesis primera: la naturaleza orgánica de las matemáticas es en sí misma contraria a la sistematización; metafóricamente hablando, sistematizar es como "disecar" el organismo vivo. Por lo tanto, la actividad sistematizadora —tesis tercera y cuarta— no es un reflejo fiel de la actividad expansiva de las matemáticas, aunque esto no la hace desdeñable.

Tesis segunda. Esta tesis expresa la perspectiva epistemológica de Kronecker, e indujo su concepción sobre los fundamentos de las matemáticas. Hay dos puntos que conviene destacar sobre ella: por un lado, Kronecker sostiene, inspirado en el físico Kirchhoff, que las *definiciones* de los conceptos básicos no son posibles porque "cada definición utiliza sus propios conceptos, que a su vez tienen que ser definidos, etc." (Boniface y Schappacher 2001, p. 225). En lugar de definiciones, Kronecker apunta a los "fenómenos" matemáticos, siendo en tal sentido que las matemáticas son una ciencia natural. Por otro lado, y debido a lo anterior, Kronecker sostiene también que "los matemáticos 'descubren' resultados a través de métodos que 'inventan' para ello" (Boniface y Schappacher 2001, pp. 232–233). Así, la libertad del matemático radicaría en la inventiva metodológica, no en la inventiva *conceptual*, como afirmaban Dedekind y Cantor, por ejemplo.[20] Sobre esto último volveré más adelante.

La precisión de las definiciones, entonces, nunca es alcanzada más que de forma aproximada debido a la naturaleza orgánica de las matemáticas (tesis primera); pero tampoco parece aceptable la *elucidación* como alternativa, pues Kronecker se oponía especialmente a "los que quieren construir nuestro conocimiento sobre bases lógico-filosóficas imprecisas" (Boniface y Schappacher 2001, p. 226).[21] Así pues, la *estructura* de las teorías inducida por las tesis primera y segunda contrasta con las teorías de Dedekind, pues el punto de par-

[20] Véase el prólogo de Dedekind 1888. Respecto de Cantor, véase Cantor 1883.

[21] La elucidación fue una alternativa que siguió Frege en su fundamentación logicista de la aritmética, la cual se inserta dentro de lo que habitualmente se denomina la "tesis conceptual" del logicismo. Sobre el papel de las elucidaciones en el proyecto logicista de Frege puede consultarse Beaney 2006. Sobre la eventual presencia de las elucidaciones en otro proyecto logicista de la época, el de Dedekind, puede consultarse Ferreirós y Lassalle-Casanave 2022 (§4). Para una discusión general sobre las elucidaciones en matemáticas, véase Seoane 2017.

tida no radica en las definiciones ni en las elucidaciones.[22] En lugar de definiciones, Kirchhoff y Kronecker situaron los *fenómenos* dados en la experiencia en el centro de los fundamentos de las ciencias naturales y matemáticas. Adicionalmente, estos están abiertos a la modificación en el curso del desarrollo de la disciplina.

Por lo tanto, la aritmética general de Kronecker también tiene su objeto dado en la experiencia. Ahora bien, esta teoría no pretende unificar todas las matemáticas, sino únicamente aquella parte que se desarrolla a partir del concepto básico ("fenómeno") de *número*, la cual excluye la geometría y la mecánica. Esta división intramatemática era muy extendida entre los matemáticos germano parlantes; una idea semejante aparece claramente formulada por Gauss en una carta a Bessel del 9 de abril de 1830 (Gray y Fauvel 1987, p. 499). Según Gauss, las matemáticas se dividen en dos categorías: las "puras" (aritmética, álgebra, análisis) cuyos conceptos tienen *origen* únicamente en el pensamiento y, las "mixtas" (geometría, astronomía, mecánica) cuyos conceptos tienen —en parte al menos— *origen* en la experiencia. La distinción es, entonces, netamente epistemológica.[23] Kronecker también discrimina la matemática pura de las "ciencias especiales", como las llama, pero no con base en la fuente epistemológica, sino por el tipo de experiencia: la de contar; pues en ella "[. . .] no aparecen ni el tiempo ni el espacio" (Boniface y Schappacher 2001, p. 227). El concepto de número dado en la experiencia de contar es el de número *natural* y, por lo tanto, es el concepto básico de la matemática pura, cuya esencia, entonces, es la aritmética.[24]

[22] Respecto a este contraste con Dedekind, Ferreirós y Lassalle-Casanave (2022) han sugerido —contra Klev (2011, 2018)— que la construcción de teorías en Dedekind estaba influida por una concepción wolffiana-kantiana de la estructura de las teorías. De acuerdo con esta, las teorías parten de definiciones, preponderantemente *genéticas*, a partir de las cuales se *deducen inmediatamente* (se "construyen", en el caso de Kant) los axiomas o postulados (para una discusión en profundidad sobre esto, véase Lassalle Casanave 2019).

[23] Para un desarrollo de esta división y su influencia, véase Ferreirós 2007b. Las expresiones "pura" y "mixta" también eran empleadas con objetivos clasificatorios en el "árbol" de Diderot y d'Alembert de la *Encyclopédie*, la cual también se organiza con arreglo a los orígenes epistemológicos ("facultades") de las ciencias. Sin embargo, debe apreciarse una diferencia importante respecto al esquema de Gauss: el árbol de Diderot y d'Alembert incluye dentro de las disciplinas "puras" a la geometría, tanto la "elemental" (que incluye a la arquitectura militar), como a la "trascendente" (*i.e.*, el estudio de las curvas).

[24] Para más detalles sobre la definición de número de Kronecker puede consultarse Boniface 2005.

Tesis tercera. El desarrollo orgánico de las matemáticas no habilita una separación estricta entre subdisciplinas; sin embargo, la sistematización involucra una separación tal entre disciplinas. Luego, la actividad matemática no es siempre del mismo tipo; Kronecker es explícito al respecto cuando afirma:

> No soy de la opinión de que la mezcla de disciplinas, incluso en sus expresiones [*i.e.*, notación], sea peligrosa; sólo creo que, al tratar los conceptos básicos [*i.e.*, en las sistematizaciones], es absolutamente necesaria una separación. [. . .] [pues] si se quiere, por ejemplo, interpretar el concepto de número, hay que concebirlo en el sentido más estricto, es decir, como un número [natural] y, *no se puede añadir lo que no está originalmente contenido en él*. Por supuesto, no se puede fijar el concepto de forma inequívoca [*i.e.*, definirlos], ya que no existe un concepto inequívoco en el sentido matemático, pero la ambigüedad debe ser la menor posible. (Boniface y Schappacher 2001, p. 231; las cursivas son mías.)

Kronecker es claro aquí: la pluralidad ("mezcla") de cuerpos teóricos (y sus "notaciones") es legítimo dentro de un desarrollo extensivo, pero las cosas son distintas cuando se trata de indagar en los conceptos básicos. Aquí la separación entre disciplinas matemáticas es importante; en efecto, esta actividad requiere tomar en sentido estricto los conceptos fundamentales y, con ello, *delimitar* con cierta artificialidad cuerpos de conocimientos. Luego, si este concepto es el de número, entonces hay que concebirlo en el sentido "más estricto" (es decir, como número natural), y esto tiene consecuencias metodológicas: *no se puede añadir lo que no está originalmente contenido en él*. Es aquí donde adquiere su lugar la tesis cuarta.

Tesis cuarta. En el contexto de la investigación en fundamentos, Kronecker se compromete con la idea de que las disciplinas matemáticas tienen un "método propio". Aquí podemos identificar la introducción de una demanda de pureza del método, en la medida en que se destaca el aspecto específicamente metodológico. Naturalmente, tal cosa presupone la necesidad de una separación "estricta" de las disciplinas matemáticas (tesis tercera).[25] La demanda purista kroneckeriana consiste pues, en tomar los conceptos básicos en su sentido más estricto, y reorganizar el cuerpo de conocimiento empleando recursos metodológicos que no agreguen nada a esos conceptos. Por lo tanto, la libertad metodológica observada en la tesis segunda queda restringida por una demanda purista en la tesis cuarta.

[25] Muy sugerente es que aquí Kronecker invoque la metáfora arquitectónica.

Sintetizando las observaciones vertidas anteriormente, podemos discriminar dos grandes tipos de práctica matemática según las tesis primera y tercera (la extensiva y la intensiva). Este era el primer punto señalado al comienzo de la sección. Así mismo, el campo de investigación que Kronecker pretende fundamentar, las matemáticas "puras", tiene como concepto fundamental al de número natural, el cual emerge a partir de la experiencia de contar y no supone nociones asociadas al espacio o el tiempo (tesis segunda). Gracias a la tesis cuarta Kroneckler introduce su demanda purista, de acuerdo con la cual la investigación sobre el concepto de número natural no debe introducir recursos metodológicos que lo extienda (aunque la extensión a los números racionales está permitida debido a que admite una reducción a los naturales).

Antes de considerar la definición kroneckeriana de "dominio de racionalidad" (cuerpo), hay que considerar la relación entre la demanda de pureza y el programa aritmetizador de Kronecker. Lo primero es más general que lo segundo, pues no se restringe a la matemática "pura", pero lo segundo *operacionaliza* lo primero. La quintaesencia del programa de Kronecker se encuentra en una carta a Cantor del 28 de agosto de 1884.[26] Allí, Kronecker sintetiza su punto de vista del siguiente modo: *toda la matemática pura podría basarse en la aritmética de los números naturales sin introducir procesos o conjuntos infinitos*. En virtud de lo anterior, resulta sencillo entender la perspectiva aritmetizadora de Kronecker a la luz de su demanda de pureza: el "fenómeno" del que se ocupa la matemática pura es el del número natural; el mismo no depende de nociones como "movimiento" o "tiempo" y, por lo tanto, este tipo de nociones quedan *excluidas* en virtud de la demanda purista. Por otra parte, este concepto de número es *finito*, por lo que las totalidades infinitas también quedan *excluidas* por razones puristas. Luego, el programa aritmetizador de Kronecker operacionaliza su demanda purista pero no se identifica con ella. Por último, esta demanda purista también restringe fuertemente la libertad para introducir *nuevos* conceptos: estos deben estar "bien justificados" y, en todo caso, deben ser reducidos al mínimo. En definitiva, tal cosa, y lo mismo vale para los métodos demostrativos, estará regulada por la restricción purista.

La unificación de la matemática pura es interpretada por Kronecker como la tarea matemática de construir una *única teoría* (la "Aritmética General"). Esta teoría abarcaría la teoría algebraica de

[26] La misma está incluida en Cantor 1991, p. 196 (una traducción al castellano se encuentra en Cantor 2006, pp. 232–233).

números [*algebraischen Grössen*] y las funciones racionales, así como el análisis y, en caso de éxito, esta sería *autónoma* de la geometría y la mecánica (Kronecker 1901, p. 5). La pregunta, entonces, es: ¿qué métodos o conceptos y por qué? Su método se basa *grosso modo* en la adjunción de “indeterminadas” y la reducción de los polinomios obtenidos con respecto a los sistemas de módulos. Estos “módulos” (o “divisores”) forman el corazón algebraico de su teoría de números, cuyo rol es análogo a los “ideales” de Dedekind. Tal metodología, se verá, está justificada por su demanda purista. Dada la complejidad técnica de los métodos de Kronecker, me voy a remitir al punto central de la cuestión:[27] las congruencias (y los polinomios) no introducen, según Kronecker, nada ajeno al concepto de número natural. Tanto el llamado “método de coeficientes indeterminados”, como los conceptos de “divisor”, “sistema de módulos”, “dominio de racionalidad” y “magnitud algebraica” son legítimos en tanto satisfacen su demanda purista, a la vez que permiten alcanzar también a las funciones racionales. En lo que sigue mencionaré rápidamente los recursos metodológicos mencionados, pero destacaré el concepto de “dominio de racionalidad”.

Kronecker se consideraba un fiel seguidor de la metodología de las congruencias e “indeterminadas” de Gauss, y en su conferencia “Üeber den Zahlbegriff” las considera como un recurso metodológico puro.

> Con la introducción sistemática de las “indeterminaciones”, que se remonta a Gauss, la teoría especial de los números enteros se ha ampliado a la teoría aritmética general de los polinomios en indeterminadas con coeficientes enteros. Esta teoría general permite evitar *todos los conceptos ajenos* [*fremden Begriffe*] a la aritmética propiamente dicha, el de número negativo, el de número fraccionario, el de número real y el de número imaginario algebraico. El concepto de número negativo puede evitarse cuando se sustituye en las fórmulas el factor -1 por la indeterminación x, y el signo de igualdad por el signo gaussiano de congruencia. Así, la ecuación $7-9=3-5$ se transformará en la congruencia $7+9x \equiv 3+5x(mod x+1)$. (1887b, p. 260; las cursivas son mías.)

El punto aquí es que el método de congruencias permite extender la aritmética de los números naturales sin extender el *concepto* de número natural, —*i.e.*, evitando “todos los conceptos ajenos” a la aritmética propiamente dicha—. Luego, este método es *puro*. Sin embargo,

[27] Una formulación accesible al lector contemporáneo de la teoría de Kronecker puede consultarse en Edwards 2013.

para que semejante extensión metodológica sea técnicamente posible, debemos referirnos y operar aritméticamente con polinomios y congruencias, a las que Kronecker denominaba genéricamente "formas". Para introducir las "fracciones", los números negativos, e incluso los reales e imaginarios algebraicos, lo que tenemos que hacer es definir una clase de equivalencia de polinomios, y, de esa manera, la cuestión técnica central consiste en determinar un proceso "algorítmico" que nos diga si un polinomio pertenece o no a esa clase de equivalencia.[28] Más exactamente: dos polinomios A y A' son equivalentes módulo $M_1, M_2, \ldots, M_n$ si existe $C_1, C_2, \ldots, C_n$ y $D_1, D_2, \ldots, D_n$, tal que $A + \sum C_i M_i = A' + \sum D_i M_i$.[29]

Volviendo al ejemplo de Kronecker en la cita, la introducción de los enteros negativos no requiere que multipliquemos un número positivo por -1, como ocurre con -2 en el polinomio constante $7-9$. En efecto, Kronecker señala que podemos sustituir -1 por x para formar $7+9x$ (este es nuestro A); para ello, tomamos el módulo $x+1$, que será responsable de introducir -1 como una solución en la ecuación final, y dos números C_i y D_i, tales como 8 y 3, por ejemplo. Posteriormente, tenemos que hallar un polinomio congruente con $7+9x+8$ $(modx+1)$; sea este $3+5x$, como en la cita (este es nuestro A'). Ahora podemos formar $7+9x+8 \equiv 3+5x+3(modx+1)$. En esta congruencia no figura -1, pero cuando pasamos a la ecuación $(7+9x+8)(x+1) = (3+5x+3)(x+1)$, vemos que $x=-1$ es una solución para la misma (la otra es $x = -\frac{9}{4}$). Nótese que "$=$" y "$\equiv$" no significan exactamente lo mismo, aunque ambas son relaciones de equivalencia (Boniface y Schappacher 2001, pp. 252–253). Dado que la equivalencia módulo $M_1, M_2, \ldots, M_n$ es consistente con la adición y la multiplicación, las clases de equivalencia se pueden sumar y multiplicar.[30] Estas clases de equivalencia forman un semianillo de

[28] Véase Kronecker 1887a.

[29] A partir de esto también podemos definir equivalencia entre sistemas de módulos. Véanse Kronecker 1887a, p. 151, y Kronecker 1886. La generalización del método de Gauss ocurre cuando pasamos a considerar sistemas de módulos: "el tratamiento aritmético de las magnitudes algebraicas conduce inevitablemente a la ampliación del concepto gaussiano de congruencia de forma que también se admitan 'sistemas de módulos' " (Kronecker 1887a, p. 211).

[30] *I.e.*, si se suman o multiplican cosas equivalentes, los resultados son equivalentes. En efecto, si fijamos $M_i = x+1$, por ejemplo, entonces las ecuaciones de tipo $A + \sum C_i(x+1) = A' + \sum D_i(x+1)$ tendrá siempre $x=-1$ como una de sus soluciones. Así mismo, por medio de un sistema de módulos $M_1, M_2, \ldots, M_n = (x+1)_1, (x+2)_2, \ldots (x+m)_n$ con m entero positivo, las ecuaciones de tipo $A + \sum C_i M_i = A' + \sum D_i M_i$, tienen una solución $x=-i$ para cada módulo

polinomios, pues la sustracción no siempre es posible.[31] Por último, vemos que incluso en este punto elemental, la existencia del "algoritmo" resulta técnicamente fundamental para la demanda purista kroneckeriana.

Resta considerar, entonces, cómo el concepto de "dominio de racionalidad" [*Rationalität-Bereich*] hace lo propio, al tiempo que amplia el alcance matemático de la misma. Kronecker definió este concepto a partir de un número *finito* de magnitudes fijas no racionales $\Re, \Re', \Re'', \ldots$, y consideró que el dominio de racionalidad era el conjunto de todas las funciones racionales (*v.g.* $\frac{ax+b}{cx+d}$) de estas magnitudes con coeficientes enteros, denotándolo por $(\Re, \Re', \Re'', \ldots)$.[32] Un dominio de racionalidad no es, pues, otra cosa que un *cuerpo*. Esta definición destaca además, que un cuerpo consiste fundamentalmente en extensiones de $\mathbb{Q}$, siguiendo así el método de adjunción introducido por Galois para la resolubilidad de las ecuaciones algebraicas (Kronecker 1882, §§1–3). En palabras actuales, la definición destaca un cuerpo como una extensión *finita* y *normal* de $\mathbb{Q}$ y, en tal sentido, se trata de una noción *operacional* de cuerpo numérico.

Allende $\mathbb{Q}$, los dominios de racionalidad kroneckerianos están arbitrariamente delimitados en virtud de la elección de los elementos a incluir por adjunción (Kronecker 1882). Esto resulta fundamental para darle a la teoría el alcance necesario, siendo aquí donde aparece el "método [*methodische Hülfsmittel*] de coeficientes indeterminados". Sean $u_1, u_2, \ldots, u_k$ incógnitas (o indeterminadas),[33] y considérese la expresión $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_ku_k$, donde los x_i son enteros algebraicos. Asumiendo que los x_i pertenecen a un cuerpo normal sobre $\mathbb{Q}$, podemos hablar de los *conjugados* de los x_i. Un conjugado de la expresión $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_ku_k$ consiste en una expresión que se obtiene al realizar una conjugación de los x_i, que son enteros de un cierto cuerpo normal, y dejando intactas las indeterminadas u_i. Esto último es fundamental; en efecto, si n es el grado del cuerpo normal que contiene los u_i, entonces el producto de todos los conjugados de $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_ku_k$ (su norma) es un polinomio homogéneo de grado n en u_i. Ahora bien, dado que los coeficientes están en $\mathbb{Q}$, la norma de cada elemento es una función simétrica y, por lo tanto,

M_i. Luego, los enteros negativos se obtienen a partir de sistemas de módulos para los polinomios A, A'.

[31] Véase Edwards 1989, p. 69.

[32] En rigor, la cardinalidad del conjunto de las magnitudes fijas puede ser *infinito*. Pero en la práctica, el conjunto de las funciones racionales queda limitado por el grado *finito* del polinomio.

[33] En la notación de Kronecker: $\Re, \Re', \Re'', \ldots$

está en $\mathbb{Q}$; además, como son sumas de enteros, son enteros. En una palabra, la norma de $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_ku_k$ tiene coeficientes en $\mathbb{Z}$ (Kronecker 1882, §14).[34] Por lo tanto, un dominio de racionalidad allende $\mathbb{Q}$ es siempre el producto de una *extensión normal* de un cuerpo.

Para finalizar la sección es necesario destacar dos aspectos puristas de estos procedimientos. Por un lado, el carácter operacional de las extensiones normales es dependiente de la representación polinómica de los números; en particular, depende de disponer de un algoritmo de reducción de polinomios, pues la extensión opera adjuntando las raíces de polinomios irreducibles en el cuerpo base.[35] Así, Kronecker identifica el cuerpo $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sobre $\mathbb{Q}$, por ejemplo, con el anillo de polinomios $\mathbb{Q}[x]$ generado a partir del polinomio no constante e irreducible $f(x) = x^2 - 2$.[36] Esta dependencia es significativa en términos de pureza: por un lado, el método de congruencias no introduce nada ajeno al concepto de número en sentido estricto; por otro lado, las formas polinómicas son *objetos* de la aritmética general. Ambas cosas pueden entenderse con arreglo a su demanda de pureza del método.

Por otro lado, Kronecker no aceptaba la existencia de las *totalidades infinitas* de números trascendentes e irracionales, pero aceptaba la existencia legítima de, digamos, $\sqrt{2}$, en tanto "magnitud indeterminada", o magnitud cuya existencia es "algebraica", —*i.e.*, existente *en tanto* raíz de $x^2 - 2$—. Así, el método de coeficientes indeterminados prioriza los *coeficientes*, dejando las indeterminadas, $u_1, u_2, \ldots$ como objeto de manipulación formal-algebraica. Naturalmente, podemos extender la cantidad de indeterminadas a necesidad, *v.g.* para calcular límites, pero siendo los polinomios entidades sintácticamente finitas, las indeterminadas en cuestión, y con ello las magnitudes irracionales y trascendentes, son consideradas en cuanto extensiones *finitas* y *algebraicas* de cuerpos. Esta restricción obedece a su purismo: pretender "determinar" la magnitud $\sqrt{2}$ allende las "magnitudes algebraicas" extendería el concepto de número, pues involucraría apelar a un procedimiento allende la aritmética general kroneckeriana (*v.g.* algún procedimiento de *medición*). Sin embargo, un procedimiento así echaría por tierra la autonomía de la teoría de Kronecker.

[34] Véanse Edwards 1980 (§10 y ss) y Edwards 2013 para una exposición técnica.

[35] La reducción de polinomios es un aspecto particularmente destacado de las *Disquisitiones* de Gauss, sección 7.

[36] Algo análogo ocurría con -1 en el ejemplo de Kronecker en la cita anterior.

3. *Dedekind: imagen arquitectónica y "conceptualismo purista"*

Dedekind adhería a la imagen arquitectónica de las matemáticas descrita hacia el final de la sección 1 (*v.g.* en el prefacio de Dedekind 1888). En particular, fue un matemático cuya actividad profesional estuvo dedicada a la construcción de teorías, como bien ilustran sus reiteradas reformulaciones de su teoría de ideales. Esta actividad estuvo orientada, incluso podría decirse que "reflejó", ciertas demandas metodológicas. Algunas de éstas conciernen a la estructuración *lógica* de las teorías a partir de *definiciones* de conceptos *introducidas* a efectos de articular la teoría y desarrollarla por medio de *deducciones rigurosamente lógicas*. En este punto, la práctica matemática de Dedekind antecede el "análisis axiomático" de las teorías (incluida la terminología arbitraria) como un medio para garantizar un "edificio inamovible".[37] En esta sección argumento que la conjunción de esta imagen con el estilo "conceptualista" de hacer matemáticas, condujo a un "conceptualismo purista" en Dedekind. Para ello, conviene empezar por considerar el estilo conceptualista y su influencia en la construcción de teorías.

Los aspectos lógicos de la imagen arquitectónica no son todo lo metodológicamente relevante para Dedekind. Éstos nos dicen algo acerca de la estructura de las teorías, pero no sobre la actividad de construirlas. Aquí interviene el llamado "otro principio de Dirichlet" (Minkowski 1911, pp. 460–461), debido a que la descripción usual aparece en el obituario de Jacobi escrito por Dirichlet (1852). Allí destaca la tendencia reciente (y creciente) en el análisis a "reemplazar el cálculo por el pensamiento" (1852, p. 245). Este *dictum* se presenta como una demanda metodológica que distingue entre conceptos y "cálculos analíticos", dándole prioridad a los primeros. Sin embargo, es incorrecto pensar que se trata de *eliminar* el cálculo del análisis; el punto es *combinar inteligentemente* el cálculo con la introducción de conceptos, aunque Dirichlet no agrega nada acerca de cómo entender la relación entre ambas cosas.[38] Con ello reaccionaba a la

[37] El "test infalible" para garantizar la solidez del edificio teórico figura en una carta a Lipschitz del 27 de julio de 1876 (Dedekind 1932, p. 479). Una traducción castellana se encuentra en Dedekind 2014, p. 187. Respecto a la "práctica axiomática" en Dedekind, pueden consultarse Sieg y Schlimm 2005, Ferreirós 2009 y Klev 2011.

[38] Dirichlet hace uso de esta metodología conceptual en la "función de Dirichlet", que toma el valor $f(x) = 0$ cuando x es racional, y $f(x) = 1$ para x irracional (Dirichlet 1829). Una definición así no depende de una expresión analítica de la misma, compuesta de variables, constantes y ciertas operaciones elementales, tales como $+, \sqrt{}, sen$, o *log*. En el siglo XVIII se solía definir *función* como una expre-

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2023.1424

tradición del siglo anterior, ejemplificada por Euler y Lagrange, de gran dominio técnico y manipulación simbólica. La nueva actitud no era ociosa, sino que estaba estrechamente relacionada con la cuestión de cómo la prueba contribuía a nuestra comprensión; en particular, este enfoque permitía *simplificar* el tratamiento del análisis y, sobre todo *generalizar* los resultados, obteniendo a la vez una importante clarificación acerca de la "naturaleza" de la teoría (Dirichlet 1852, p. 246).[39]

Dirichlet describe cómo Jacobi ponía en práctica este principio en conexión con la construcción de teorías: "[Jacobi] buscó presentar las ideas rectoras en las que se basa toda teoría, y elimina[r] todo lo que tenía la apariencia de artificialidad" (1852, p. 246). La construcción de una teoría en estos términos supone un proceso de "análisis" del estado del arte de la disciplina, a efectos de *hallar* el puñado privilegiado de conceptos. Luego, el contenido de una teoría (los conceptos fundamentales) es un *descubrimiento anterior* a la elaboración de la misma, —*i.e.*, ocurre durante la investigación—. Al mismo tiempo, este puñado de conceptos es el factor *unificador* de la teoría. Dedekind adoptó una perspectiva así en su práctica matemática, la cual contrasta con Kronecker: la introducción de nuevos conceptos era algo celosamente vigilado por éste, mientras que la introducción "conceptualista" de nuevos conceptos (y métodos) era, para Dedekind, una actividad matemática indispensable para el progreso de la misma. Este pensamiento es tan constante en Dedekind que lo podemos encontrar ya en su disertación.[40,41] Las matemáticas conceptuales de Dedekind (y Riemann) involucran prácticas matemáticas fuertemente orientadas por la introducción de nuevos conceptos que *extendían* los cuerpos de conocimiento precedentes. Tal relación se manifiesta, por ejemplo, en la crítica de Dedekind a la manera en que Kummer introdujo los números ideales como *divisores idea-*

sión analítica, e incluso se entendía que las funciones continuas eran aquellas que obedecían a una única *expresión analítica*. Así pues, lo que tenemos es una caracterización "abstracta" de función a partir de la cual emerge un concepto general de función como una relación de muchos-a-uno.

[39] Una expresión temprana y contundente de la misma puede apreciarse en el art. 76 de las *Disquisitiones* de Gauss.

[40] Véase Dedekind 1930, p. 1.

[41] Sobre el aspecto lógico de la introducción de conceptos puede consultarse Ferreirós 2009, §2. Sobre esta temprana actitud de Dedekind puede consultarse Ferreirós 2007a, pp. 84 y ss. Para Dedekind la introducción de nuevos conceptos era una actividad "creativa" de la mente. Véanse Dedekind 1872, y 1888.

les, es decir, caracterizando su operativa pero no como objetos por derecho propio.[42]

Una práctica matemática así orientada puede caracterizarse como "matemática conceptual", adjetivación también aplicable a los productos de este tipo de práctica.[43] Podemos distinguir dos variantes del conceptualismo dependiendo de su combinación con la imagen orgánica o arquitectónica; el punto aquí es que el purismo metodológico de Dedekind resulta de la segunda combinación y, por ello, puede adjetivarse "conceptualismo purista". Esto se aprecia en las condiciones introducidas por él para las definiciones de conceptos fundamentales en su teoría algebraica de números (*v.g.* su definición de cuerpo). Para apreciar el contraste alcanza con atender la caracterización de Riemann de la *continuidad analítica de una función* (holomorfismo), pues esta combina el conceptualismo con la imagen orgánica. En efecto, por medio de las condiciones "Cauchy-Riemann", Riemann establece una conexión con la teoría del potencial en física, mientras que por medio del concepto de *superficie riemanniana* la definición establece una conexión con la geometría (topológica).[44] Esta caracterización introduce relaciones "orgánicas" entre análisis, física y geometría, al tiempo que la misma es independiente de las *expresiones* analíticas particulares de esas funciones. Esto resulta contrario a la imagen arquitectónica y su prioridad por la construcción de edificios teóricos autónomos; luego, Dedekind debe ser diferenciado de Riemann como un conceptualista purista (volveré sobre esta comparación más adelante).

Además de la introducción de nuevos conceptos en la construcción de teorías, Dedekind también destaca la importancia de que la teoría toda también revista un carácter conceptual. Hacia el final de §12 en Dedekind (1877), Dedekind afirma que

> [*una*] teoría, basada en el cálculo, no ofrecería todavía, me parece, el mayor grado de perfección; es preferible, como en la teoría moderna de las funciones [de Riemann], buscar y derivar las demostraciones, no a partir del cálculo, sino inmediatamente a partir de los conceptos

[42] Véanse Dedekind 1932, p. 287 y Avigad 2006, p. 172.

[43] Tomo esta denominación de Ferreirós 2023. Sobre el enfoque conceptual en las matemáticas de Dedekind, véanse Stein 1988, Corry 2004, cap. 2, Ferreirós 2007a, Sinaceur 1988, Avigad 2006, Ferreiros y Reck 2020.

[44] Véase su "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse" (1851) en Riemann 1876. Respecto al estilo conceptualista de Riemann y su importancia para las matemáticas modernas, puede verse Laugwitz 1999, cap. 4 y Ferreirós 2007a, caps. I.5, II.

> fundamentales característicos, y construir la teoría de tal manera que esté, por el contrario, en condiciones de predecir los resultados del cálculo. (1932, p. 296)[45]

El interés de Dedekind está en cómo construir la teoría de números algebraicos y las demostraciones están al servicio de ello: es en este contexto que adquiere relevancia la preocupación por cierto tipo de demostraciones. Dedekind procura derivar los resultados a partir de un puñado de conceptos, en vez de emplear *ab initio* el "cálculo". No se trata pues de prescindir de esto último, sino de hacerlo depender del concepto.[46]

Es en las *definiciones* donde el conceptualismo purista de Dedekind se manifiesta claramente; una fuente clásica es su monografía sobre teoría algebraica de números de 1877. En una nota al pie Dedekind propone condiciones "que deberían imponerse siempre en la introducción o la creación de nuevos elementos aritméticos [*i.e.*, conceptos]" (1877, p. 269). Dedekind introduce tres demandas para una definición del conjunto de los números reales a partir de los racionales, las cuales se sintetizan del siguiente modo:[47] la definición de $\mathbb{R}$ debe "mantenerse exenta de toda mezcla de elementos extraños", tales elementos son la noción de *magnitud*,[48] las representaciones *polinómicas* donde los reales se introducen individualmente como raíces (al estilo de Kronecker), así como los logaritmos. La definición debe estar fundada sobre "fenómenos que se puedan ya constatar claramente en el dominio [$\mathbb{Q}$]". Además, la definición no debe "engendrar" uno a uno de los elementos como ocurre con los logaritmos o las raíces de polinomios irreducibles, sino ofrecer una "definición común".[49] Por último, las definiciones deben permitir una introducción clara de los cálculos.

Estas condiciones se adecuan al conceptualismo purista, y eso se aprecia en su pretensión de *autonomía*: lo que Dedekind considera

[45] *Cfr.* Dedekind 1895, pp. 54–55.

[46] *Cfr.* Dedekind 1932, p. 469, donde Dedekind habla de introducir los cálculos como un "resultado de la teoría".

[47] De acuerdo con Edwards (1983, pp. 12–13), estas condiciones se inspiran en introducción de los números irracionales en Dedekind 1872, especialmente en §2.

[48] Dedekind excluye, al igual que Kronecker, la geometría y la mecánica del ámbito de las matemáticas "puras" (véase la sección 2), pero sus razones para hacerlo están más cercanas a Gauss. Dedekind adoptó esta posición, tanto en Dedekind 1872 como en 1888, por ejemplo.

[49] Caso contrario, nada nos garantiza que las operaciones con dichos elementos sean invariantes u "homogéneas", —*i.e.*, las mismas—. Esto es lo que Dedekind quiere decir en otros sitios con "invariante" (*v.g.* Dedekind 1930, p. 202).

"intrínseco" involucra únicamente a operaciones *entre* los elementos de un conjunto (*v.g.* $\mathbb{R}$), mientras lo "extraño" atañe a toda representación perteneciente a otros cuerpos teóricos (tales como el álgebra, entendida como el estudio de ecuaciones), o cuyo empleo en la definición requiere suponer o demostrar alguna *conexión* de esas representaciones con el concepto. Caso contrario, podría ocurrir que un cambio de representación constituya un cambio de concepto (*v.g.* dos polinomios con distintos coeficientes podrían introducir distintos números irracionales). Pero aun contando con tal demostración, la *definición* no descansaría sobre "fenómenos" constatables directamente en los elementos del conjunto. Luego, la definición no sería *autónoma*. En contraste con Riemann, que apela a una pluralidad de cuerpos teóricos distintos del análisis, Dedekind excluye como "impuros" o "ajenos" tanto los recursos geométricos (magnitudes) como las "formas" (*v.g.* ecuaciones y logaritmos).[50] Si esta lectura es acertada, se aprecia entonces cómo la conjunción de un enfoque conceptual con la imagen arquitectónica de las matemáticas, parece conducir a una perspectiva conceptual purista.[51]

Antes de finalizar la sección examinando el concepto de "cuerpo", conviene detenerse en el programa aritmetizador, que en Dedekind (1888) devino en logicismo. Dedekind *operacionalizó* su fundamentación purista de la matemática pura por medio de un programa aritmetizador. Tal cosa demandaba tener bien delimitado aquello que se entiende por "aritmético", si es que queremos garantizar que nada extraño se haya introducido en nuestras definiciones. Para ello no basta con acordar que los enteros positivos son números (asunto por demás trivial), sino que también tenemos que ser claros respecto de si los recursos que ponemos en práctica para las definiciones de los demás números, *v.g.* conjuntos infinitos de elementos "arbitrarios", o polinomios, caen bajo el concepto de "aritmético". En este sentido, y análogamente a lo que ocurre con Kronecker, aplicar la demanda conceptualista purista a la matemática pura, conduce con naturalidad a un programa aritmetizador.

Puede concluirse que el conceptualismo purista de Dedekind es inseparable del contexto de desarrollo intensivo. En la introducción a la segunda edición de las conferencias sobre teoría de números de Dirichlet, Dedekind anuncia la importancia del concepto de cuerpo

[50] Véase a este respecto Avigad 2006, pp. 171–174.

[51] Desde una perspectiva purista, podría decirse que la inclusión de la diferenciación y la integración entre las operaciones elementales —junto con la adición, el producto, etc.— Riemann "mezcló" los ámbitos del álgebra y el análisis. Véase Riemann 1876, p. 38.

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2023.1424

numérico en la satisfacción de sus principios metodológicos, al tiempo que se aprecia el interés de Dedekind por unificar el álgebra y la teoría de números en la teoría algebraica de números.

> En los siguientes párrafos, he intentado introducir al lector en un campo superior en el que el álgebra y la teoría de números están *íntimamente conectados*. En el curso de las conferencias sobre la división del círculo y el álgebra superior, que di en Gotinga en el invierno de 1856–1857 [. . .] me convencí de que el estudio de la relación algebraica entre los números se basa más adecuadamente en un concepto que está *directamente vinculado* a los principios aritméticos más simples. Más tarde cambié el nombre de "campo racional" [*rationales Gebiet*], que utilizaba entonces, por el de "cuerpo" [*Körper*]. (Dedekind 1932, p. 400; las cursivas son mías.)

La unificación entre álgebra y teoría de números pone en el centro la introducción de nuevos y más generales conceptos: el de "cuerpo".[52] Este nuevo concepto —al igual que el concepto de ideal— no introduce "formas de representación" [*Darstellungsformen*], sino conjuntos infinitos con estructura, en conformidad con su conceptualismo purista. Así, definió un cuerpo como un conjunto de números reales o complejos "cerrado en sí mismo" bajo suma, resta, multiplicación y división. Esta apunta directamente a operaciones *entre* números reales o complejos y la misma no supone otra cosa que esas operaciones. En otras palabras, se trata de una definición *autónoma* dentro de la teoría algebraica de números, pues, por un lado, no supone propiedades analíticas o topológicas de esos conjuntos numéricos, sino únicamente aritméticas; por otro lado, la definición evita recurrir a expresiones explícitas —polinomios— para los números, pues esto "estropearía" o "deformaría" [*verunzieren*] la presentación "por interferencias innecesarias con las formas de representación [*Darstellungsformen*], que en realidad sólo deberían ser el resultado de la teoría, no un medio [*constitutivo*] para la teoría [*Hülfsmittel der Theorie*]" (Dedekin 1932, p. 469. *cfr.* pp. 223–224). Como Dedekind observa, su definición de cuerpo no está mediado sino "directamente vinculado" a los principios aritméticos. En conclusión, se trata de una definición conceptualmente purista.

Para finalizar, comparemos los conceptos de cuerpo de Dedekind y dominio de racionalidad de Kronecker. Dos aspectos son relevantes: por un lado, las definiciones no son exactamente equivalentes por

[52] A lo largo de las sucesivas reformulaciones Dedekind coloca el concepto de "módulo" y "sistema de módulos" como los conceptos de partida de su teoría.

razones de cardinalidad (Ferreirós y Reck 2020, p. 68); por otra parte, la definición de Kronecker enfatiza aspectos operativos, mientras Dedekind enfatiza la "invariancia" de las cuatro operaciones aritméticas. Sobre lo primero: los dominios de racionalidad siempre están generados por un número *finito* de elementos $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots$ debido a la siempre finita cantidad de indeterminadas de los polinomios, mientras que los cuerpos dedekinianos no se enfrentan a tal restricción. Luego, la totalidad de los números algebraicos es un cuerpo dedekiniano, pero no un dominio de racionalidad. Algo similar ocurre con $\mathbb{R}$, que no fue aceptado por Kronecker en absoluto. Sobre lo segundo: las extensiones finitas y algebraicas kroneckerianas dependen de la representación polinómica de los números sobre un cuerpo dado (canónicamente: $\mathbb{Q}$); esto no le satisfacía a Dedekind, quien prefirió llamar a K un "cuerpo finito" sobre $\mathbb{Q}$ cuando sólo hay un número finito de subcuerpos K' tales que $\mathbb{Q} \subseteq K' \subseteq K$. Esta es una definición conceptual y purista que no apela a la operativa con polinomios, sino a una propiedad "invariante" e independientemente de la intrusión de ecuaciones explícitas o "formas de representación". Estas quedan relegadas a ser medios auxiliares, pero no constitutivos de la teoría.[53] Como es bien sabido, la tendencia conceptualista de Dedekind le condujo a proponer definiciones *conjuntísticas* y de marcado acento *estructuralista* (Ferreirós y Reck 2020).

Puede concluirse que las diferencias puristas entre ambos matemáticos permiten entender las diferencias entre sus conceptos de cuerpo y dominio de racionalidad. Ambos diferían sobre lo que consideraban "intrínseco" y "ajeno". Esta diferencia es la contraparte de su divergencia sobre el significado de "aritmético": Kronecker era más tradicional al enfatizar los naturales y sus operaciones (cómputo), mientras que Dedekind era más vanguardista —*i.e.*, conjuntística, estructural y abstracto—. Dedekind consideraba los polinomios como algo "formal" extra-aritmético en la teoría de Kronecker.[54] Este, por su parte, creía que el conceptualismo purista sólo nos "extraviaría o crearía fantasías".[55] Luego, que Kronecker no aceptara la expansión del *concepto* de número que sí aceptaba Dedekind y, que el segundo no aceptara los *métodos* propuestos por el primero para extender el

[53] Estas diferencias entre Dedekind y Kronecker no eran del todo advertidas por Hilbert (1897, §§1, 4, 6), Hurwitz (1895), o Landau (1917). Ellos consideraban ambas definiciones como equivalentes sin más.

[54] Véase el comentario #1 de Dedekind a los *Grundzüge* de Kronecker en Edwards *et al.*, 1982, p. 54.

[55] Véase la carta a Lipschitz del 7 de agosto de 1883 en Lipschitz 1986, p. 182, así como la nota al pie en Kronecker 1886, p. 156.

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2023.1424

dominio de la aritmética, se explica por razones de pureza. Ellos no promovieron la erradicación de los cuerpos de teoría de las nuevas matemáticas, pero diferían en cómo fundamentarlos.

4. *Conclusiones*

Las anteriores secciones mostraron cómo las demandas puristas de Kronecker y Dedekind emergieron con naturalidad en la construcción de sus teorías. Esta actividad estaba íntimamente relacionada con la pretensión de unificar una pluralidad de cuerpos de conocimiento "dispersos" en las matemáticas puras. Así, la metodología purista permitía simultáneamente *unificar* y *desagregar* un área particular de las matemáticas: unifica cuerpos de teoría dispersos en la teoría algebraica de números, a la vez que desagrega esta última del análisis y la geometría, convirtiéndola en una disciplina autónoma. Esta autonomía era alentada por una imagen arquitectónica de las teorías. También se observó cómo sus demandas puristas eran operacionalizadas en sus programas aritmetizadores y, finalmente, se ilustraron esas diferencias mediante un examen del concepto dedekiniano de cuerpo y el concepto kroneckeriano de dominio de racionalidad.

Para finalizar, volvamos a la crítica de Kreisel y Cellucci presentada al principio del artículo. Esta debe ser contextualizada: Kronecker y Dedekind tenían como trasfondo la extensión de la noción de número y su separación de la noción de magnitud. Esta situación estuvo promovida por un progreso extensivo de la teoría de números de las *Disquisitiones* de Gauss, donde tal extensión involucró el empleo de una pluralidad de métodos y conceptos que pusieron en interacción cuerpos de conocimientos matemáticos distintos y novedosos. En este contexto los métodos impuros se muestran fecundos para el progreso matemático y los casos enfatizados por Kreisel y Cellucci se ajustan bien al mismo. Tal cosa, entonces, no resulta en absoluto incompatible con el hecho de que las demandas de pureza emerjan en ocasión de un progreso intensivo. Nótese que incluso alguien como Kronecker, para quien las matemáticas "resisten" las sistematizaciones, enfatiza la importancia de la pureza del método a la hora de la investigación en fundamentos. Puede sugerirse, entonces, lo siguiente: o bien Kronecker tenía una concepción más "plural" de la actividad matemática que Dedekind, en la medida en que esta no siempre se rige por los mismos preceptos; o bien, podría decirse que Dedekind orientó su vida profesional homogéneamente a la construcción de teorías, mientras que Kronecker confirió también importancia al tratamiento de problemas particulares, *v.g.* su *Jugendtraum*.[56] Sea cual fuere la situación, no puede decirse que las matemáticas de Kronecker y Dedekind sean estériles, mucho menos que las demandas de pureza *per se* lo sean. Mi punto, en todo caso, es que la pureza del método no es una exigencia *in*condicional, y, por lo tanto, las objeciones de Kreisel y Cellucci están mal encaminadas en virtud de que parecen no hacer lugar al valor contextual de la misma.[57]

BIBLIOGRAFÍA

Arana, Andrew, 2022, "Idéaux de Preuve: Explication Et Pureté", en Andrew Arana y Marco Panza (eds.), *Précis de philosophie de la logique et des mathématiques, Volume 2, philosophie des mathématiques*, Éditions de la Sorbonne, París, pp. 387–425.

Arana, Andrew, 2017, "On the Alleged Simplicity of Impure Proof", en Roman Kossak, y Philip Ording (eds.), *Simplicity: Ideals of Practice in Mathematics and the Arts*, Springer Cham, Suiza, pp. 205–226.

Arana, Andrew, 2014, "Purity in Arithmetic: Some Formal and Informal Issues", en Godehard Link (ed.), *Formalism and Beyond. On the Nature of Mathematical Discourse*, volumen 23 en la serie *Logos*, De Gruyter, Munich/Boston, pp. 315–335.

Arana, Andrew, 2008, "Logical and Semantic Purity", *Protosociology*, vol. 25, pp. 36–48.

Arana, Andrew y Paolo Mancosu, 2012, "On the Relationship between Plane and Solid Geometry", *The Review of Symbolic Logic*, vol. 5, no. 2, pp. 294–353.

Avigad, Jeremy, 2006, "Methodology and Metaphysics in the Development of Dedekind's Theory of Ideals", en José Ferreirós y Jeremmy J. Gray (eds.), *The Architecture of Modern Mathematics*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 159–186.

Baldwin, John T., 2013, "Formalization, Primitive Concepts, and Purity", *The Review of Symbolic Logic*, vol. 6, no. 1, pp. 87–128.

Beaney, Michael, 2006, "Frege and the Role of Historical Elucidation: Methodology and the Foundations of Mathematics", en José Ferreirós, y Jeremy J. Gray (eds.), *The Architecture of Modern Mathematics:*

[56] Véase Kronecker 1930, pp. 455–457.

[57] Agradezco a José Ferreirós por motivarme a escribir este trabajo, así como por las discusiones que sostuvimos en Sevilla que tanto me ayudaron. También agradezco a Abel Lassalle Casanave por su orientación y comentarios durante la redacción de este trabajo. Así mismo, agradezco a Washington Morales por la ayuda con algunas traducciones del alemán, así como a Susana Puente por algunas correcciones al último manuscrito. Por último, quisiera agradecer también a dos revisores/as anónimos/as cuyas críticas y sugerencias mejoraron sustantivamente el artículo. Los errores subsistentes son, como es obvio, de mi exclusiva responsabilidad.

Essays in History and Philosophy, Oxford University Press, Nueva York, pp. 47–66.

Boniface, Jacqueline, 2005, "Leopold Kronecker's Conception of the Foundations of Mathematics", *Philosophia Scientiae*, vol. 9, no. S2, pp. 143–156.

Boniface, Jacqueline y Norbert Schappacher, 2001, "Sur le concept de nombre en mathématique", Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891), *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 7, no. 2, pp. 207–275.

Bourdieu, Pierre, 2002, *Questions de sociologie*, 2a edición, Éditions de Minuit, París.

Cantor, Georg, 2006, *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*, ed. José Ferreirós, y trad. José Ferreirós y Emilio Gómez-Caminero, Crítica, Madrid.

Cantor, Georg, 1991, *Georg Cantor: Briefe*, ed. Meschkowski Herberted, y Winfried Nilson, Springer.

Cantor, Georg, 1883, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre: ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Teubner, Leipzig.

Cellucci, Carlo, 2017, *Rethinking Knowledge: The Heuristic View* (European Studies in Philosophy of Science, volume 4), Springer.

Corry, Leo, 2004, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser Basel, Suiza.

Davenport, Harold, 2013, *Multiplicative Number Theory* (Graduate Texts in Mathematics, volume 74), Springer Science and Business Media, Alemania.

Dedekind, Richard, 2014, "¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática", ed. y trad. José Ferreirós, Alianza, Madrid.

Dedekind, Richard, 1932, *Gesammelte mathematische Werke*, volume 3, Druckund Verlas Ton Friedr.

Dedekind, RIchard, 1931, *Gesammelte mathematische Werke*, volume 2, Druckund Verlas Ton Friedr.

Dedekind, Richard, 1930, *Gesammelte mathematische Werke*, volume 1, Druckund Verlas Ton Friedr.

Dedekind, Richard, 1895, "Üeber die Begründung der Idealtheorie", *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1894, pp. 106–113. En Dedekind 1931, pp. 50–58.

Dedekind, Richard, 1888, "Was sind und was sollen die Zahlen? Vieweg, Braunschweig", en Dedekind 1932, pp. 335–391. Trad. al castellano en Dedekind 2014.

Dedekind, Richard, 1877, "Sur la théorie des nombres entiers algébriques", *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, vol. 1, no. 1, pp. 69–92. Editado separadamente en Gauthier-Villars, París, 1977. Citas y referencias a la reimpresión parcial en Dedekind 1932, pp. 262–296.

Dedekind, Richard, 1872, *Stetigkeit und irrationale Zahlen. F. Vieweg und sohn*, en Dedekind 1932, pp. 315–334. Trad. al castellano en Dedekind 2014.

Detlefsen, Michael, 2008, "Purity as an Ideal of Proof", en Paolo Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford, pp. 179–197.

Detlefsen, Michael y Andrew Arana, 2011, "Purity of Methods", *Philosophers' Imprint*, vol. 11, no. 2, pp. 1–20.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1897, *G. Lejeune Dirichlet's Werke, Band II*, Druck Und Verlag Von Georg, Berlín.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1889, *G. Lejeune Dirichlet's Werke, Band I*, Druck Und Verlag Von Georg, Berlín.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1854, "Über den ersten der von Gauß gegebenen Beweise des Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der quadratischen Reste", *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, vol. 47, pp. 139–150. En Dirichlet 1897, pp. 121–137.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1852, "Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi", Band II, en Leopold Kronecker Wercke (ed.), 1897, pp. 225–252, Druck Und Verlag Von Georg, Berlín.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1842, "Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, pp. 291–371; reimpreso en Dirichlet 1889, pp. 533–518.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1840, "Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 21, pp. 1–12. En Dirichlet 1897, pp. 411–496.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1838, "Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres", en Dirichlet 1889, pp. 357–374.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1837, "Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält", en Dirichlet 1889, pp. 313–342.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1829, "Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 4, pp. 157–169.

Dugac, Pierre, 1973, "Eléments d'analyse de Karl Weierstrass", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 10, pp. 41–174.

Edwards, Harold M., 2013, *Divisor Theory*, Springer Science and Business Media, Alemania.

Edwards, Harold M., 1989, "Kronecker's Views on the Foundations of Mathematics", en David E. Rowe y John McCleary (eds.), *Ideas and Their Reception: Proceedings of the Symposium on the History of*

Modern Mathematics, Vassar College, Poughkeepsie, New York, June 20–24, 1989, pp. 65–77, Elsevier, Estados Unidos.

Edwards, Harold M., 1983, "Dedekind's Invention of Ideals", *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 15, no. 1, pp. 8–17.

Edwards, Harold M., 1980, "The Genesis of Ideal Theory", *Archive for History of Exact Sciences*, pp. 321–378.

Edwards, Harold M., Olaf Neumann, y Walter Purkert, 1982, "Dedekinds 'Bunte Bemerkungen' zu Kroneckers 'Grundzüge' ", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 27, no. 1, pp. 49–85.

Eisenstein, Ferdinand Gotthold, 1975, *Mathematische Werke*, vol. 2, Chelsea Publ., Nueva York.

Eisenstein, Ferdinand Gotthold, 1847, *Mathematische Abhandlungen: besonders aus dem Gebiete der höhern Arithmetik und der elliptischen Functionen. Mit einer Vorrede von Gauss*, Reimer, Alemania.

Eisenstein, Ferdinand Gotthold, 1845, "Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendante", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 29, pp. 177–184. En Eisenstein 1847, pp. 121–128.

Eisenstein, Ferdinand Gotthold, 1844, "Einfacher Beweis und Verallgemeinerung des Fundamentaltheorems für die biquadratischen Reste", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 28, pp. 223–245.

Ferreirós, José, 2023, "Conceptual Structuralism", *Journal for General Philosophy of Science*, vol. 54, pp. 125–148.

Ferreirós, José, 2016, "Sobre la certeza de la aritmética", en José Ferreirós, y Abel Lassalle Casanave (eds.), *El árbol de los números*, Editorial Universidad de Sevilla, España, pp. 193–118.

Ferreirós, José, 2015, *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*, Princeton University Press, Nueva Jersey.

Ferreirós, José, 2009, "Hilbert, Logicism, and Mathematical Existence", *Synthese*, vol. 170, no. 1, pp. 33–70.

Ferreirós, José, 2007a, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Springer Science and Business Media, Alemania.

Ferreirós, José, 2007b, "The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", en Goldstein, Schappacher, and Schwermer (eds.) 2007, pp. 235–268.

Ferreirós, José, y Abel Lassalle-Casanave, 2022, "Dedekind and Wolffian Deductive Method", *Journal for General Philosophy of Science*, vol. 53, pp. 345–365.

Ferreirós, José, y Erick H. Reck, 2020, "Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions", en Erich H. Reck, and Georg Schiemer (eds.), *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, Oxford University Press, Oxford, pp. 59–87.

Gauss, Carl Fiedrich, 1917, *Werke, vol. X.1, Nachtraege zur reinen Mathematik. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Teubner, Leipzig.

Gauss, Carl Fiedrich, 1866, *Werke, vol. III, Analysis. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Universitäts-Druckerei, Gotinga.

Gauss, Carl Fiedrich, 1863, *Werke, vol. II, Höhere Arithmetik. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Universitäts-Druckerei, Gotinga, 2a edición aumentada, 1876.

Gauss, Carl Fiedrich, 1849, *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen*, en Gauss 1866, pp. 113–115.

Gauss, Carl Fiedrich, 1831, *Theoria residuorum biquadraticorum, Comm. II*, en Gauss 1863, pp. 169–178.

Gauss, Carl Fiedrich, 1818, "Neue Beweise und Erweiterungen des Fundamentalsatzes in der Lehre von den quadratischen Resten", en *Untersuchungen Über Höhere Arithmetik*, AMS Chelsea Publishing, 1986, pp. 496–510.

Goldstein, Catherine y Norbert Schappacher, y Joachim Schwermer (eds.), 2007, *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Springer, Berlín.

Goldstein, Catherine y Norbert Schappacher, 2007a, "A Book in Search of a Discipline (1801–1860)", en Goldstein, Schappacher, y Schwermer (eds.) 2007, pp. 2–65.

Goldstein, Catherine y Norbert Schappacher, 2007b, "Several Disciplines and a Book (1860–1901)", en Goldstein, Schappacher, y Schwermer (eds.) 2007, pp. 66–103.

Gray, Jeremy y John Fauvel, 1987, *The History of Mathematics: A Reader*, Macmillan Education, Reino Unido.

Guntau, Martin y Hubert Laitko, 1987, "Entstehung und Wesen wissenschaftlicher Disziplinen", en Martin Guntau and Hubert Laitko (eds.), *Der Ursprung der modernen Wissenschaften, Studien zur Entstehung wissenschaftlicher Disziplinen*, Akademie-Verlag Berlin, pp. 17–89. Reimpreso por De Gruyter en 2022. https://doi.org/10.1515/9783112598627

Hilbert, David, 1970, "Axiomatisches Denken", en *Gesammelte Abhandlungen, Band III*, Springer, pp. 146–156.

Hilbert, David, 1902, "Mathematical Problems", *Bulletin-American Mathematical Society*, vol. 37, no. 4, pp. 407–436. [Versión en inglés: Mary Winston Newson.]

Hilbert, David [1898/1899], "Grundlagen der Euklidischen Geometrie", en Michael Hallett, y Ulrich Majer (eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891–1902*, Springer Science and Business Media, Alemania, 2004, pp. 221–286.

Hilbert, David, 1897, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4*. [Versión en inglés: I. Adamson, *The Theory of Algebraic Number Fields*, intr. Franz Lemmermeyer, Norbert Schappacher, y René Schoof, Springer, 1998.]

Hurwitz, Adolf, 1895, "Über die Theorie der Ideale", *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1894, pp. 291–298.

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 1891, "Über die complexen Primzahlen, welche in der Theorie der Reste der 5ten, 8ten und 12ten Potenzen zu betrachten sind", en Karl Weierstrass (ed.), *Gesammelte Werke, Band 6*, Verlag Von Georg Reimer, Berlín, pp. 275–280.

Klein, Felix, 2016, *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint Volume II: Geometry*, Springer.

Klein, Felix, 1979, *Development of Mathematics in the 19th Century*, Math Sci. Press. [Versión en inglés: Gerald M. Akerman.]

Klev, Ansten, 2018, "A Road Map of Dedekind's Theorem 66 HOPOS", *The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science*, vol. 8, no. 2, pp. 241–277.

Klev, Ansten, 2011, "Dedekind and Hilbert on the Foundations of the Deductive Sciences", *The Review of Symbolic Logic*, vol. 4, no. 4, pp. 645–681.

Kreisel, Georg, 1980, "Kurt Gödel, 28 April 1906–14 January 1978", *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, vol. 26, pp. 148–224.

Kronecker, Leopold, 1930, *Leopold Kronecker's Werke, volume 5*, BG Teubner, Leipzig.

Kronecker, Leopold, 1901, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, ed. K. Hensel, volume 2, BG Teubner, Leipzig.

Kronecker, Leopold, 1899, *Leopold Kronecker's Werke: Herausgegeben auf veranlassung der Königlich preussischen akademie der wissenschaften, volume 3.1*, BG Teubner, Leipzig.

Kronecker, Leopold, 1897, *Leopold Kronecker's Werke: Herausgegeben auf veranlassung der Königlich preussischen akademie der wissenschaften, volume 4*, BG Teubner, Leipzig.

Kronecker, Leopold, 1887a, "Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 100, pp. 490–510, en Kronecker 1899, pp. 209–240.

Kronecker, Leopold, 1887b, "Über den Zahlbegriff. Crelle J. reine und angew Mathematik", vol. 101, pp. 337–355, en Kronecker 1899, pp. 249–274.

Kronecker, Leopold, 1886, "Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, vol. 99, pp. 329–371, en Kronecker 1899, pp. 145–207.

Kronecker, Leopold, 1882, "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. (Abdruck einer Festschrift zu Herrn EE Kummers Doctor-Jubiläum, 10. September 1881.)", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 93, pp. 1–122, en Kronecker 1897, pp. 237–387.

Kronecker, Leopold, 1857, "Ueber die elliptischen Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet. Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin", pp. 363–372, en Kronecker 1897, pp. 177–184.

Kummer, Ernst Eduard, 1975, *Collected Papers II Function Theory, Geometry and Miscellaneous*, ed. André Weil, Springer.

Kummer, Ernst Eduard, 1860, "Gedächtnissrede auf Gustav Peter Lejeune Dirichlet", en Leopold Kronecker (ed.) 1897, *G. Lejeune Dirichlet's Werke, Band II*, Druck Und Verlag Von Georg, pp. 309–344.

Kummer, Ernst Eduard, 1859, *Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze den Resten und Nichtresten der Potenze, deren Grand eine Primzahl ist*, Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Druckerei der Königl.

Kummer, Ernst Eduard, 1839, "Rezension", *Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik*, 13 y 14, Berlín, pp. 101–109.

Landau, Edmund, 1917, "Richard Dedekind-Geddchtnisrede. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen", pp. 50–70.

Lassalle Casanave, Abel, 2019, *Por construção de conceitos: em torno da filosofia kantiana da matemática*, PUC-Rio, Río de Janeiro.

Laugwitz, Detlef, 1999, *Bernhard Riemann, 1826–1866: Turning Points in the Conception of Mathematics*, Springer.

Lemmermeyer, Franz, 2013, *Reciprocity Laws: from Euler to Eisenstein*, Springer Science and Business Media, Alemania.

Lemmermeyer, Franz, 2007, "The Development of the Principal Genus Theorem", en Goldstein, Schappacher, and Schwermer 2007, Springer, Berlín, pp. 529–561.

Lipschitz, Rudolf, 1986, *Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass und anderen*, ed. Winfried Scharlau, Springer.

Minkowski, Hermann, 1911, *Gesammelte Abhandlungen, volume 2*, BG Teubner, Leipzig.

Ohm, Martin, 1842, *Der Geist der mathematischen Analysis und ihr Verhältniss zur Schule, Band I*, Duncker und Humblo, Berlín.

Pieri, Mario, 1901, "Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique", *Logique et Histoire des Sciences*, vol. 3, pp. 367–404.

Rescher, Nicholas, 2003, *Epistemology: An introduction to the Theory of Knowledge* (SUNY Series in Philosophy), State University of New York Press, Albany.

Riemann, Bernhard, 1876, *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, ed. Richard Dedekind y Heinrich Weber, BG Teubner, Leipzig.

Seoane, José, 2017, "On Mathematical Elucidation", *Revista Portuguesa de Filosofia*, vol. 73, no. 3/4, pp. 1405–1422.

Sieg, Wilfried y Dirk Schlimm, 2005, "Dedekind's Analysis of Number: Systems and Axioms", *Synthese*, vol. 147, no. 1, pp. 121–170.

Sinaceur, Mohammed Allal, 1988, "Dedekind et le programme de Riemann", seguido de la traducción de Richard Dedekind, de *Analytische Untersuchungen zu Bernhard Riemann's Abhandlungen uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde Liegen*, *Revue D'histoire Des Sciences*, vol. 41, no. 3–4, pp. 237–296.

Stein, Howard, 1988, "Logos, *Logic, and* Logistiké: *Some Philosophical Remarks on the Nineteenth Century Transformation of Mathematics*", *History and Philosophy of Modern Mathematics*, vol. 11, pp. 238–259.
Stichweh, Rudolf, 1984, *Zur Entstehung des modernen Systems wissenschaftlicher Disziplinen: Physik in Deutschland 1740–1890*, Suhrkamp, Fráncfort.
Von Waltershausen, Wolfgang Sartorius, 1856, *Gauss: zum Gedächtnis*, S. Hirzel, Leipzig.
Weierstrass, Karl, 1924, "Zur funktionentheorie", *Acta Math.*, vol. 45, pp. 1–10. Publicación de una sesión del último seminario ofrecido por Weierstrass en Berlín el 24 de mayo de 1884.
Weyl, Hermann, 1944, "David Hilbert and His Mathematical Work", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 9, no. 4, pp. 612–654.

Recibido el 3 de diciembre de 2022; aceptado el 24 de abril de 2023.