ENSEÑANZA REVISTA MEXICANA DE FÍSICA E **56** (2) 197–206 DICIEMBRE 2010

Conceptos básicos acerca del espín, helicidad, quiralidad y polarización de una partícula de Dirac

S.R. Juárez Wysozka
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional, Zacatenco, 07738 D.F., México,
e-mail. rebeca@esfm.ipn.mx

Recibido el 3 de junio de 2010; aceptado el 3 de septiembre de 2010

Los avances tecnológicos recientes, apoyados en una profunda comprensión de las características propias de los electrones, son los elementos que ya están listos para innovar la tecnología de la información, así como para refinar la técnica de imágenes mediante el efecto de la resonancia magnética (MRI), la cual es crucial como herramienta de diagnóstico para generar vistas de tejidos vivos sin invasión ni daño, entre otras aplicaciones importantes. Así que, con la intensión de explicar los conceptos teóricos básicos que no son tratados, en general, con suficiente claridad en la literatura especializada y libros de texto tradicionales, relacionados con las partículas descritas mediante la ecuación de Dirac, analizamos los operadores cuánticos que proyectan sus peculiares características. Estos operadores están asociados con cantidades teóricas que se conservan y por ende están relacionadas con las simetrías del sistema. Consideramos la formulación Hamiltoniana para establecer el principio de conservación y las propiedades de los proyectores que determinan la de helicidad, quiralidad y polarización de las partículas de Dirac.

Descriptores: Fermiones; espín.

The recent technological advances, based on the profound understanding of the electron´s inherent characteristics are the elements that are ready to innovate the technology of information, as well as to refine the (MRI) technique of imagery through the efect of magnetic resonance, which is crucial as a tool for diagnosis and generation of views of live tissues without invasion or harm. So, with the intention to explain the basic theoretical concepts, which are, in general, not clarified in the specialized literature and traditional textbooks, which are related with the particles in Dirac equation, we analize the quantum operators that project some of their peculiar characteristics. These operators are related with the conserved quantities in the theory and therefore with the symmetries of the system. We consider the Hamiltonian formulation to establish the conservation principle and the properties of the projectors that determine the helicity, quirality and polarization of the Dirac particles.

Keywords: Fermions; spin.

PACS: 01.30.Rr; 01.40.Ha; 03.65.Pm

1. Formulación Hamiltoniana

El marco de referencia teórico para describir las características y el comportamiento de partículas básicas, como lo son el electrón y los quarks, es la ecuación cuántico-relativista, obtenida por P. Dirac en 1928 [1]. Estas partículas satisfacen la estadística de Fermi-Dirac, que establece que no puede haber dos de ellas con todos sus números cuánticos idénticos (esto es, en el mismo estado cuántico de partícula individual). Lo anterior es conocido como el principio de exclusión de Pauli, con el cual se explica la tabla periódica de los elementos. Con el propósito de describir las propiedades relacionadas con el espín que caracteriza a las partículas de Dirac y encontrar las constantes de movimiento, apropiadas para la detección de observables simultáneas, vamos a considerar el hamiltoniano de la ecuación de Dirac H_D para partícula libre [2]:

$$H_D = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2 = \sum_{i=1}^{3} c\alpha_i p_i + \beta mc^2. \tag{1}$$

Éste consiste de los siguientes elementos: el trivector momento $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y la masa m de la partícula, la velocidad de la luz c y las matrices $\vec{\alpha}$ y β, que en la representación estándar (RS) tienen la siguiente forma:

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{2}$$

y $\vec{\sigma} = \left(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\right)$ son las matrices de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Las matrices $\vec{\alpha}$ y β son tales que anticonmutan entre sí y sus cuadrados generan la matriz identidad.

En la formulación covariante se adoptan las matrices γ^μ con $\mu = 0, ..., 3$, las cuales son matrices 4×4 que están definidas en términos de bloques de matrices 2×2 en los que participan la matriz I identidad y las matrices de Pauli. En la RS están dadas la siguiente manera:

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$
$$\gamma^i \equiv \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad i = 1, ..., 3. \tag{4}$$

En términos de estas matrices γ^μ el hamiltoniano de la ecuación de Dirac se reescribe de la siguiente forma considerando que $\left(\gamma^0\right)^2 = I$:

$$H_D = c\left(\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + \gamma^0 mc\right). \tag{5}$$

En adelante vamos a trabajar en unidades naturales para las cuales $c = 1$, $\hbar = 1$, los índices latinos toman valores de 1 a 3, mientras que los griegos van de 0 a 3 e índices repetidos implicarán suma sobre ellos. Solamente se considera el carácter covariante y contravariante de tensores cuando se utilizan índices griegos.

Las matrices γ^μ satisfacen la relación de anticonmutación siguiente, donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico de la relatividad especial:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$
$$g^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

La base conveniente para describir cualquier matriz de $4{\times}4$ está dada por 16 matrices las cuales son I, γ^μ, $\sigma^{\mu\nu}$, $\gamma^5\gamma^\mu$ y

$$\gamma^5 = \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

La definición de la matriz $\sigma^{\mu\nu}$ es

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right], \tag{7}$$

que en forma explícita corresponde a

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{2}\left[\gamma^i, \gamma^j\right] = -i\begin{pmatrix} \sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^i\sigma^j \end{pmatrix}$$
$$= \varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \varepsilon_{ijk}\Sigma_k, \tag{8}$$
$$\sigma^{0j} = \frac{i}{2}\left[\gamma^0, \gamma^j\right] = \frac{i}{2}\left(\gamma^0\gamma^j - \gamma^j\gamma^0\right) = i\alpha_j. \tag{9}$$

La matriz $\vec{\Sigma}$ se define en la Ec. (8) y en tanto que

$$\left(\gamma^5\right)^2 = I, \qquad \gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5 \tag{10}$$

puede establecerse fácilmente la relación que existe entre $\vec{\Sigma}$ y $\vec{\alpha}$.

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \gamma^5\vec{\alpha}, \quad \vec{\alpha} = \gamma^5\vec{\Sigma} = \vec{\Sigma}\gamma^5. \tag{11}$$

2. Representación matricial del espín

En base al principio que establece que en ausencia de fuerzas externas, el momento angular total $\vec{J}$ se conserva, $[H, \vec{J}]$=0, es decir, que éste conmuta con el hamiltoniano, vamos a encontrar la expresión explícita para el espín $\vec{S}$ (momento angular interno de la partícula en consideración).

Para ello, primeramente vamos a evaluar el conmutador del momento angular orbital $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ con el hamiltoniano

$$\left[H_D, L_k\right] = \varepsilon_{ijk}\left[H_D, r_i p_j\right] \neq 0 \tag{12}$$

y obtenemos, para partícula libre, que estos operadores no conmutan entre sí. Lo anterior determina que existe una componente adicional con características de momento angular (el espín $\vec{S}$) que compensa al $\vec{L}$ de tal manera que el momento angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, sí se conserva, es decir,

$$\left[H_D, J_k\right] = 0. \tag{13}$$

Tenemos entonces

$$\left[H_D, \vec{L}\right] = -i\hbar c\left(\vec{\alpha}\times\vec{p}\right) \neq 0, \tag{14}$$

y al proponer

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{4i}\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}, \qquad \left(\vec{S}\right)_i = \frac{\hbar}{4i}\varepsilon_{ijk}\alpha_j\alpha_k. \tag{15}$$

resulta

$$\left[H_D, \vec{S}\right] = -\left[H_D, \vec{L}\right]. \tag{16}$$

Por lo que

$$\left[H_D, \vec{J}\right] = \left[H_D, \vec{L} + \vec{S}\right] = 0, \quad \vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S}. \tag{17}$$

Así que, tomando en cuenta las Ecs. (4)

$$\left(\vec{S}\right)_i = \frac{\hbar}{4i}\varepsilon_{ijk}\alpha_j\alpha_k = \frac{\hbar}{4i}\varepsilon_{ijk}\gamma^0\gamma^j\gamma^0\gamma^k$$
$$= \frac{i\hbar}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma^j\gamma^k = \frac{\hbar}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma^{jk} \tag{18}$$
$$\left(\vec{S}\right)_i = \frac{\hbar}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma^{jk} = \frac{\hbar}{2}\,\Sigma_i \tag{19}$$

y al comparar éste con el resultado de la sección anterior

$$\sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk}\Sigma_k, \qquad \Sigma_n = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijn}\sigma^{ij} \tag{20}$$

y utilizar las propiedades del tensor de Levi-Civita,

$$\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn},$$
$$\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ijn}\sigma^{ij} = \sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ijn}\varepsilon_{ijk}\Sigma_k = 2\delta_{kn}\Sigma_k = 2\Sigma_n \tag{21}$$

se confirma que $\vec{S} = (\hbar/2)\vec{\Sigma}$. Por otro lado, no es difícil demostrar que $\vec{S}$ satisface las reglas de conmutación propias de un momento angular.

3. Representación del espín en el sistema propio

Para el sistema particular en el que la partícula libre se encuentra en reposo, $(H_D) = \gamma^0 mc^2$ las soluciones de la ecuación de Dirac,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 I & 0\\ 0 & -mc^2 I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{22}$$

son

$$\varphi = \widetilde{\varphi}\exp\left(-imc^2 t\right), \quad \chi = \widetilde{\chi}\exp\left(imc^2 t\right)$$

donde

$$\widetilde{\varphi} = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\chi} = \begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} \tag{23}$$

es decir

$$\widetilde{\varphi} = \varphi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \varphi_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\chi} = \chi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \chi_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{24}$$

y se interpretan los estados de energía positiva φ_i y los de energía negativa χ_i como estados de espín para arriba si $i = 1$ y de espín para abajo si $i = 2$.

Por lo anterior parecería adecuado considerar a la matriz $\vec{\Sigma}$ para describir al espín de la partícula, sin embargo esto, en general, no es lo correcto.

Dado que

$$\begin{aligned}\left[\gamma^0, \Sigma_k\right] = \left[\gamma^0, \gamma^5\gamma^0\gamma^k\right] &= \gamma^0\gamma^5\gamma^0\gamma^k\\ -\gamma^5\gamma^0\gamma^k\gamma^0 &= -\gamma^5\gamma^k + \gamma^5\gamma^k = 0,\end{aligned} \tag{25}$$

para partícula libre $[\vec{S}, H_D] = 0$, sí conmutan entre sí, lo que implica que estos operadores tienen autoestados que comparten. Sin embargo, en el caso más general Ec. (5), el término $c\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{p}$ del hamiltoniano no conmuta con $\vec{\Sigma}$, es decir, considerando las Ecs. (10) y (11) se obtiene

$$\begin{aligned}\left[\gamma^0\gamma^i p_i, \Sigma_k\right]_{k\neq i} &= \left[\gamma^0\gamma^i, \Sigma_k\right] p_i\\ &= \left[\gamma^0\gamma^i, \gamma^5\alpha_k\right] p_i = \left[\gamma^0\gamma^i, \gamma^5\gamma^0\gamma^k\right] p_i\\ &= \left(\gamma^0\gamma^i\gamma^5\gamma^0\gamma^k - \gamma^5\gamma^0\gamma^k\gamma^0\gamma^i\right) p_i\\ &= \gamma^5\left(-\gamma^i\gamma^k + \gamma^k\gamma^i\right) p_i\\ &= 2\gamma^5\left(g^{ki} - \gamma^i\gamma^k\right) p_i\\ &= 2\gamma^5\left(-p_k - p_i\gamma^i\gamma^k\right) \neq 0\end{aligned} \tag{26}$$

Resultando que, tan sólo para el sistema en reposo, $\vec{\Sigma}$ representa adecuadamente al espín de la partícula.

4. Operador helicidad

Usando el resultado de la Ec. (26) se puede verificar que al multiplicar el conmutador en ella por p_k, es decir, al construir el operador $\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}$ sí se logra obtener un operador asociado a una constante de movimiento, que comparte estados propios con el H_D en tanto que

$$\left[H_D, \vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right] = 0. \tag{27}$$

Consecuentemente, el operador correspondiente a la proyección de $\vec{\Sigma}$ en la dirección del trimomento de la partícula adquiere importancia y es conocido como el operador de helicidad Λ, [3]:

$$\Lambda = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}. \tag{28}$$

A diferencia de $\vec{\Sigma}$, el nuevo operador $\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}$ relacionado con el espín $\vec{S}$=(1/2)$\vec{\Sigma}$ es un operador relevante cuyos autoestados también son autoestados de energía definida.

Dado que $\Lambda^2 = 1$, los valores propios de este operador Λ son $\lambda = \pm 1$ para sus autoestados $u_h^{\pm}$

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right) u_h^{\pm} = \lambda^{\pm} u_h^{\pm}, \qquad \hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}. \tag{29}$$

Para $\lambda^{+} = 1$, $\vec{\Sigma}$ y $\vec{p}$ tienen el mismo sentido (helicidad positiva) y para el autovalor $\lambda^{-} = -1$ la helicidad es negativa, $\vec{\Sigma}$ y $\vec{p}$ son antiparalelos. (Ver el Apéndice para encontrar los estados $u_h^{\pm}$ para un caso particular).

5. Operador de quiralidad γ^5

La quiralidad está relacionada con el giro y se refiere a la "lateralidad" derecha o izquierda de un sistema. Como $\left(\gamma^5\right)^2 = 1$, sus valores propios son ± 1 y sus estados propios son las soluciones de la siguiente ecuación $\gamma^5 u_{ch}^{\pm} = \pm u_{ch}^{\pm}$:

$$\gamma^5\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}_{ch} = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}_{ch} = \pm\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}_{ch}, \tag{30}$$

por lo tanto

$$\chi_{ch} = \pm\varphi_{ch}; \tag{31}$$

en consecuencia

$$u_{ch}^{+} = \begin{pmatrix}\varphi_{ch}\\ \varphi_{ch}\end{pmatrix}, \qquad u_{ch}^{-} = \begin{pmatrix}\varphi_{ch}\\ -\varphi_{ch}\end{pmatrix},$$

$$\varphi_{ch} = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}. \tag{32}$$

Los autoestados de quiralidad requieren tan sólo de dos componentes, es decir, las dos componentes de φ_{ch}.

Al aplicar el operador (de proyección)

$$P_{ch}^{\pm} = (1/2)\left(1 \pm \gamma^5\right)$$

a un estado en el que se combinan diferentes quiralidades $u_{ch} = au_{ch}^{+} + bu_{ch}^{-}$, éste selecciona sus correspondientes estados de quiralidad, es decir,

$$\begin{aligned} P_{ch}^{+}u &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \\ &\times \left(a\varphi_{ch}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\varphi_{ch}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = au_{ch}^{+}\,, \\ P_{ch}^{-}u &= bu_{ch}^{-}. \end{aligned} \tag{33}$$

Considerando los valores propios de γ^5, en su representación diagonal (quiral) la γ^5 toma la forma

$$\left(\gamma^5\right)_{ch} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}_{ch} \tag{34}$$

siendo en la representación estándar

$$\left(\gamma^5\right)_{st} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}_{st}. \tag{35}$$

El paso de la representación quiral a la estándar para las matrices γ^μ se efectúa mediante la transformación S siguiente

$$\gamma_{st}^{\mu} = S\gamma_{ch}^{\mu}S^{-1}, \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}. \tag{36}$$

6. Proyector de estados de helicidad

Las propiedades generales de los operadores de proyección para una base con sólo dos estados u^+, u^- son

$$\begin{aligned} P^{+} + P^{-} = 1, \quad P^{+}\cdot P^{-} = P^{-}\cdot P^{+} = 0, \\ \left(P^{\pm}\right)^2 = P^{\pm}. \end{aligned} \tag{37}$$

El operador proyector de helicidad $P_h^{\pm}$ al ser aplicado a un estado $u_h = u_h^{+} + u_h^{-}$ selecciona los estados de acuerdo a su helicidad

$$P_h^{\pm}u_h = \frac{1}{2}\left(1 \pm \Lambda\right)u_h = u_h^{\pm}. \tag{38}$$

Es interesante establecer la diferencia que existe entre los estados de helicidad y los de quiralidad. Para ello reescribimos el hamiltoniano de la Ec. (1) de la siguiente manera para estados estacionarios de energía positiva:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\,u = (E - \beta m)\,u, \tag{39}$$

y combinando las Ecs. (38), (28), (11) donde $\hat{p} = (\vec{p}/\left|\vec{p}\right|)$ llegamos a

$$P_h^{\pm}u = \frac{1}{2}\left(1 \pm \Lambda\right)u = \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5\vec{\alpha}\cdot\hat{p}\right)u, \tag{40}$$

y usando la Ec. (39) obtenemos

$$P_h^{\pm}u = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\gamma^5\left(E - \beta m\right)}{\left|\vec{p}\right|}\right)u. \tag{41}$$

Observamos que sólo en el caso de partícula con masa nula, es decir $m = 0,\ \ E = \left|\vec{p}\right|$,

$$\left(\lim\,\left(P_h^{\pm}\right)\Big|_{m\to 0}\right)u = \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5\right)u. \tag{42}$$

Los proyectores de helicidad y el de quiralidad coinciden, *i.e*, en este caso los estados quirales corresponden a los estados de helicidad definida. Este resultado es de suma utilidad por su frecuente aplicación en procesos ultrarrelativistas en los cuales suele despreciarse la masa en reposo de la partícula al compararla con su energía total.

Una teoría que es asimétrica entre quiralidades es conocida como una teoría quiral, mientras que una teoría que es simétrica ante paridad se conoce como una teoría vectorial. La muy importante teoría electro-débil desarrollada a la mitad del siglo veinte es un ejemplo de una teoría quiral.

En la representación estándar, las soluciones estacionarias de energía positiva para partículas sin masa son las siguientes:

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha}\cdot\vec{p})_{st}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}_{st} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix}_{st}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}_{st} \\ &= E\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}_{st}, \end{aligned} \tag{43}$$

lo que equivale a

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_{st} = E\varphi_{st}, \qquad \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\varphi_{st} = E\chi_{st}; \tag{44}$$

por lo tanto, como $E = \left|\vec{p}\right|$ y si $\hat{p} = \vec{p}/\left|\vec{p}\right|$ entonces

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\chi_{st} = \varphi_{st}, \qquad \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\varphi_{st} = \chi_{st}. \tag{45}$$

Al combinar las ecuaciones anteriores (sumando y restando) obtenemos los autoestados del operador helicidad y de quiralidad con eigenvalores ± 1:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\left(\varphi_{st} + \chi_{st}\right) &= \left(\varphi_{st} + \chi_{st}\right), \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\left(\varphi_{st} - \chi_{st}\right) &= -\left(\varphi_{st} - \chi_{st}\right), \end{aligned} \tag{46}$$

es decir,

$$u_{ch}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{st} \pm \chi_{st}\right). \tag{47}$$

Es costumbre denotar a estos estados como el estado derecho (R) $\phi_R = u_{ch}^{+}$ (al de helicidad y quiralidad positiva) e izquierdo (L) al $\phi_L = u_{ch}^{-}$ (al de helicidad y quiralidad negativa).

7. Proyector de espín

El operador que proyecta al espín en una dirección dada, determinada por el cuadrivector s^μ, está definido en la literatura [2] de la siguiente manera:

$$P^s_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5\gamma^\mu s_\mu\right). \tag{48}$$

Normalmente se argumenta que este operador es el adecuado para describir en forma covariante al proyector de espín de la teoría de dos componentes (Pauli). Se establece además que el vector de espín está definido en términos de la polarización, donde los estados polarizados en la dirección $\hat{s}$ son tales que cumplen con la ecuación

$$(\vec{\sigma}\cdot\hat{s})\,u = u, \tag{49}$$

es decir, que el espinor u corresponde al estado de una partícula polarizada a lo largo de la dirección del vector unitario $\hat{s}$.

Para entender con mayor profundidad la razón de la importancia del operador de la Ec. (48), sus características y el papel que juega en la formulación adecuada para la descripción de los estados físicos observables, vamos a enfocarnos ahora en el elemento $\gamma_5\gamma^\mu s_\mu$ que lo constituye.

Resulta, como vamos a demostrar, que este elemento conmuta con el hamiltoniano de Dirac, por lo que está relacionado con una constante de movimiento y por lo tanto los estados propios del operador $\gamma_5\gamma^\mu s_\mu$ son compatibles con los autoestados del H_D (de energía). Lo anterior se satisface siempre y cuando esté presente un vector s^μ, que se asocia al espín, que satisface la relación $p^\mu s_\mu = 0$. Este producto es invariante de Lorentz y es siempre nulo debido a que en el sistema propio se considera a $p_\mu = (m,0,0,0)$ y específicamente a $s^\mu = (0, s_x, s_y, s_z)$.

Partiendo del hamiltoniano asociado a la ecuación de Dirac

$$\left(\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + \gamma^0 mc\right)u = p_0\,u, \tag{50}$$

hay que evaluar el conmutador de $\gamma^5\gamma^\mu$ con cada una de sus componentes

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{p}, \gamma^5\gamma^\mu\right] &= \left[\gamma^0\gamma^i, \gamma^5\gamma^\mu\right]p_i\\
&= \gamma^5\left(\gamma^0\gamma^i\gamma^\mu - \left(\gamma^\mu\gamma^0\right)\gamma^i\right)p_i\\
&= \gamma^5\left(\gamma^0\gamma^i\gamma^\mu - \left(2g^{\mu 0} - \gamma^0\gamma^\mu\right)\gamma^i\right)p_i\\
&= \gamma^5\left(\gamma^0\gamma^i\gamma^\mu - 2g^{\mu 0}\gamma^i\right.\\
&\quad\left.+\gamma^0\left(2g^{\mu i} - \gamma^i\gamma^\mu\right)\right)p_i\\
&= 2\gamma^5\left(g^{\mu i}\gamma^0 - g^{\mu 0}\gamma^i\right)p_i,\\
\left[\gamma^0, \gamma^5\gamma^\mu\right] &= \left[\gamma^0, \gamma^5\gamma^\mu\right]\\
&= \left[\gamma^0, \gamma^5\gamma^\mu\right] = \left(\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu - \gamma^5\gamma^\mu\gamma^0\right)\\
&= \gamma^5\left(-\gamma^0\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^0\right)\\
&= -\gamma^5\left(\gamma^0\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^0\right) = -2\gamma^5 g^{0\mu}.
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\left[H_D, \gamma^5\gamma^\mu\right] &= \left[\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + \gamma^0 m, \gamma^5\gamma^\mu\right]\\
&= 2\gamma^5\left(g^{\mu i}\gamma^0 p_i - g^{\mu 0}\vec{\gamma}\cdot\vec{p} - mg^{0\mu}\right).
\end{aligned} \tag{51}$$

Despejando el efecto de$\vec{\gamma}\cdot\vec{p}$en la Ec. (50)

$$\begin{aligned}
H_D u &= c\gamma^0\left(\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m\right)u\\
&= p_0\,u \rightarrow \left(\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m\right)u = \gamma^0 p_0\,u,
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{p}u = \left(\gamma^0 p_0 - m\right)\,u, \tag{53}$$

y sustituirlo en la Ec. (51)

$$\begin{aligned}
\left[H_D, \gamma^5\gamma^\mu\right] &= 2\gamma^5\left(g^{\mu i}\gamma^0 p_i - g^{\mu 0}\left(\gamma^0 p_0 - m\right) - mg^{0\mu}\right)\\
&= 2\gamma^5\gamma^0\left(g^{\mu i}p_i - g^{\mu 0}p_0\right).
\end{aligned} \tag{54}$$

En particular obtenemos los conmutadores no nulos siguientes

$$\begin{aligned}
\left[H_D, \gamma^5\gamma^0\right] &= -2\gamma^5\gamma^0 p_0,\\
\left[H_D, \gamma^5\gamma^j\right] &= -2\gamma^5\gamma^0 p_j.
\end{aligned} \tag{55}$$

Hasta aquí hemos encontrado que el elemento $\gamma^5\gamma^\mu$ por sí solo no conmuta con el hamiltoniano. A pesar de tener las características propias asociadas a un vector axial como el necesario para representar al espín. Hace falta un ingrediente adicional. Si se introduce el vector $s_\mu = (s_{0,} - \vec{s})$ multiplicando la Ec. (51), se logra que el conmutador se anule, *i.e.*,

$$\begin{aligned}
\left[H_D, \gamma^5\gamma^\mu s_\mu\right] &= -2\gamma^5\gamma^0 p_0 s_0 + 2\gamma^5\gamma^0 p_j s_j\\
&= -2\gamma^5\gamma^0\left(p_0 s_0 - p_j s_j\right) = 0,
\end{aligned} \tag{56}$$

ya que $p^\mu s_\mu = 0$ es invariante de Lorentz como se ha mencionado anteriormente. De esta manera hemos encontrado un resultado sumamente importante referente a que el proyector de espín está definido en términos de $\gamma^5\gamma^\mu$ proyectado sobre el vector de polarización, de tal manera que $\gamma^5\gamma^\mu s_\mu$ es una constante de movimiento, por tanto, sus estados propios son autoestados de la energía. Finalmente hay que resaltar que $\overline{u}\gamma^5\gamma^\mu u$ se comporta como un vector axial. Para entender aun con mayor formalidad al operador relacionado con el espín, se requiere considerar al grupo de Poincaré y al seudovector de Pauli-Lubanski. [4].

8. Autoestados del operador de polarización para partícula en movimiento

Como se ha mecionado anteriormente, la polarización del espín es el grado de alineación de éste en una dirección dada.

En la representación estándar para estados estacionarios de energía positiva y partículas masivas se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$(H_D)_{st\sigma}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}_{st} \equiv \begin{pmatrix} m & c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\\ c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m\end{pmatrix}_{st}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}_{st} = E\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}_{st}, \tag{57}$$

$$\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{(E-m)}\chi = \varphi, \qquad \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{(E+m)}\varphi = \chi. \tag{58}$$

Los estados u y valores propios del operador $O_p = \gamma^5\gamma^\mu s_\mu$ están definidos de la siguiente manera:

$$\gamma^5\gamma^\mu s_\mu u = \lambda_p u, \qquad \lambda_p = \pm 1, \tag{59}$$

donde $\hat{s}$ fija la dirección del espín mediante un vector unitario y $s\cdot s$ es invariante de Lorentz:

$$\left(\gamma^5\gamma^\mu s_\mu\right)^2 = \gamma^5\gamma^\mu s_\mu\gamma^5\gamma^\rho s_\rho = -\gamma^\mu\gamma^\rho s_\mu s_\rho = -s\cdot s = 1. \tag{60}$$

En consecuencia

$$\gamma^5\gamma^\mu s_\mu u^\pm = \pm u^\pm \tag{61}$$

y el operador de proyección es

$$P^p_\pm = \frac{1}{2}\left(1\pm\gamma^5\gamma^\mu s_\mu\right). \tag{62}$$

En la representación estándar

$$\gamma^5\gamma^\mu s_\mu = \begin{pmatrix} 0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_0 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{s}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{s} & -s_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{s} & -s_0\\ s_0 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{s}\end{pmatrix}. \tag{63}$$

Al conmutar este operador con el hamiltoniano, comparte autoestados de éste Ec. (58) y se satisfacen las ecuaciones

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{s}-\lambda_p)\,\varphi - s_0\chi = 0,$$
$$s_0\varphi - (\vec{\sigma}\cdot\vec{s}+\lambda_p)\,\chi = 0. \tag{64}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones consideramos

a) $s_0 = 0$ en el sistema en reposo, difiriendo las soluciones en su polarización.

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{s}\varphi = \lambda_p\varphi \qquad \vec{\sigma}\cdot\vec{s}\chi = -\lambda_p\chi \tag{65}$$

b) $s_0 \neq 0$, en el sistema en movimiento al multiplicar la primera de las Ecs. (64) por $(\vec{\sigma}\cdot\vec{s}+\lambda_p)$ y usar la segunda

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{s}+\lambda_p)\left[(\vec{\sigma}\cdot\vec{s}-\lambda_p)\,\varphi - s_0\chi\right] = 0, \tag{66}$$

obtenemos un resultado correcto $s^\mu s_\mu = -1$

$$\left[(\vec{s}\cdot\vec{s}-1)\,\varphi - s_0\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{s}+\lambda_p)\,\chi\right] = 0, \tag{67}$$

$$\left[\vec{s}\cdot\vec{s}-1-(s_0)^2\right]\varphi = 0 \rightarrow (s_0)^2 - \vec{s}\cdot\vec{s}+1 = 0 \rightarrow s^\mu s_\mu = -1. \tag{68}$$

Por otro lado, combinando las ecuaciones con $\vec{p}\neq 0$ y $m\neq 0$, Ecs. (64) y (58)

$$\left((\vec{\sigma}\cdot\vec{s}-\lambda_p) - s_0\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{(E+m)}\right)\varphi = 0,$$
$$\left(s_0\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{(E-m)} - (\vec{\sigma}\cdot\vec{s}+\lambda_p)\right)\chi = 0, \tag{69}$$

obtenemos las ecuaciones para autoestados de polarización para una partícula en movimiento:

$$\left[(\vec{\sigma}\cdot\vec{s}-\lambda_p)\,(E+m) - s_0\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right]\varphi = 0,$$
$$\left[(\vec{\sigma}\cdot\vec{s}+\lambda_p)\,(E-m) - s_0\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right]\chi = 0. \tag{70}$$

Para verificar este resultado se sustituye la siguiente ecuación que define a s'^μ en un sistema en movimiento relativo a s'^μ en el sistema en reposo en (70):

$$s^\mu = \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{s'}}{m}, \vec{s'} + \frac{\left(\vec{p}\cdot\vec{s'}\right)\vec{p}}{m\,(E+m)}\right) \tag{71}$$

y resulta para φ

$$\left[\vec{\sigma}\cdot\vec{s'}(E+m) + \frac{(\vec{p}\cdot\vec{s})\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m} - \lambda_p(E+m) - \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{s'}}{m}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right]\varphi = 0 \tag{72}$$

$$\left[\vec{\sigma}\cdot\vec{s}-\lambda_p\right]\varphi = 0; \tag{73}$$

análogamente para χ

$$\left[\vec{\sigma}\cdot\vec{s}+\lambda_p\right]\chi = 0. \tag{74}$$

Lo que muestra la acertada definición para el operador proyector de estados de polarización debido a la rigurosa compatibilidad con la del sistema en reposo.

9. Polarización de un haz de partículas

En muchos experimentos se pueden producir haces polarizados de electrones, por lo que es importante entender cómo incorporar operadores de proyección que puedan seleccionar el espín de un conjunto de partículas. En la práctica, el operador de proyección del espín se aplica para medir la polarización de haces de electrones dispersados considerando la siguiente definición:

$$P = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L}, \tag{75}$$

donde N_R denota el número de electrones que emergen con una helicidad positiva (derechos) y N_L el número de electrones que emergen con una helicidad negativa (izquierdos). N_R, N_L y P son generalmente funciones de la energía y ángulo de dispersión para un proceso dado [5].

En el sistema en reposo, sin embargo, sabemos que el espín de un sistema puede ser descrito por un tri-vector que apunta en cierta dirección, así que se introduce el cuadrivector s^μ, el cual, en el sistema en reposo, se reduce a, $s^\mu = (0, \vec{s})$. Entonces, demandando que éste se transforme como un cuadrivector, podemos impulsar al sistema (boost) mediante una transformación de Lorentz. El vector asociado al espín s^μ satisface lo siguiente:

$$s^2 = -1 = \left(s^0\right)^2 - \vec{s}\cdot\vec{s}, \qquad s^\mu p_\mu = 0, \tag{76}$$

es decir,

$$s^0 = \vec{s}\cdot\vec{\beta}, \qquad \vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E}. \tag{77}$$

Al combinar estos resultados, en términos del vector unitario $\hat{\mathbf{s}}$ en la dirección del vector $\vec{s}$ se obtiene de

$$-1 = \left(\vec{s}.\vec{\beta}\right)^2 - \vec{s}^2, \tag{78}$$

$$|\vec{s}| = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\vec{\beta}\cdot\hat{s}\right)^2}}. \tag{79}$$

Para electrones con helicidad definida: derecha se tiene $\beta_i \cdot (\hat{s}_i)_R = +\beta_i$, y para los de helicidad izquierda $\beta_i \cdot (\hat{s}_i)_L = -\beta_i$ ya que $(\hat{s})_R = -(\hat{s})_L$. Entonces

$$\left|(\vec{s})_{R,L}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{m}, \qquad \beta = \left|\vec{\beta}\right|, \tag{80}$$

además

$$\left(s^0\right)_R = \beta\left|(\vec{s})_R\right|, \qquad \left(s^0\right)_L = -\beta\left|(\vec{s})_L\right|. \tag{81}$$

En el caso general en el que el espín de un electrón de energía positiva y en movimiento, con función de onda $u(p,s)$ se proyecte en una dirección arbitraria $n^\mu = (0, \vec{n})$, el ángulo entre el espín y una dirección arbitraria se define de la siguiente manera [2]:

$$\begin{aligned}\cos\alpha \equiv \langle\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\rangle &= \frac{u^\dagger(p,s)\,\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}u(p,s)}{u^\dagger(p,s)\,u(p,s)}\\ &= \sqrt{1-\beta^2}\;\overline{u}(p,s)\,\gamma_5\not{n}\,u(p,s).\end{aligned} \tag{82}$$

En esta ecuación se ha considerado la normalización siguiente:

$$u^\dagger(p,s)\,u(p,s) = \frac{E}{m} = \frac{E}{\sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{83}$$

y

$$\begin{aligned}&\overline{u}_\alpha(p,s)\left(\gamma_5\not{n}\right)_{\alpha\beta}\,u_\beta(p,s)\\ &\qquad = \left(\gamma_5\not{n}\right)_{\alpha\beta}u_\beta(p,s)\,\overline{u}_\alpha(p,s)\end{aligned} \tag{84}$$

Para obtener resultados prácticos, se introducen los operadores de proyección de espín y energía correspondientes al estado del electrón,

$$u(p,s)_\beta\,\overline{u}_\alpha(p,s) = \left[\frac{\not{p}+m}{2m}\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2}\right]_{\beta\alpha}, \tag{85}$$

y la Ec.(82) adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \sqrt{1-\beta^2}\mathrm{Tr}\left(\gamma_5\not{n}\,\frac{(\not{p}+m)}{2m}\frac{(1+\gamma_5\not{s})}{2}\right)\\ &= \sqrt{1-\beta^2}\vec{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{n}},\end{aligned} \tag{86}$$

Al sustituir el valor de $|\vec{s}|$, de la Ec. (79) se concluye que

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\left(\vec{\beta}\cdot\hat{\mathbf{s}}\right)^2}}\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{n}}. \tag{87}$$

Hay que enfatizar que aquí están involucrados dos ángulos diferentes.

El ángulo de proyección del espín en la dirección del movimiento, el cual está asociado a la helicidad y el ángulo entre el espín y una dirección $\vec{n}$ arbitraria el cual determina la polarización.

Ahora consideremos varios casos:

i) Primer caso $\beta\cdot\hat{s} = 0$, es decir $\hat{\mathbf{s}}$ es perpendicular a la dirección del movimiento dada por $\vec{\beta}$. Para una situación ultrarelativista, es decir, $\beta \to 1,\ \cos\alpha = 0$

ii) Segundo caso. Para estados de helicidad, es decir $(\beta\cdot\hat{\mathbf{s}})^2 = \beta^{2,}$ entonces $\cos\alpha = \hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{n}}$.. Si además $\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{n}}. = \pm 1$, cuando el espín es paralelo o antiparalelo a esta dirección, $\hat{\mathbf{n}}$ también corresponde a la dirección del movimiento $\cos\alpha = \pm 1$.

El valor promedio de $\cos\alpha$ para un haz de electrones está dado por

$$\langle\cos\alpha\rangle = \sum_{\pm s} w(s,p)\cos\alpha, \tag{88}$$

donde $w(s,p)$ es la probabilidad de transición a un estado final con momento p y espín s . La suma se efectúa sobre los estados de helicidad.

Si el espín se proyecta en la dirección del movimiento

$$\begin{aligned}\langle\cos\alpha\rangle &= \sum_{\pm s} w(s,p)\cos\alpha\\ &= w(s_R,p) - w(s_L,p) = P\end{aligned} \tag{89}$$

P es la polarización que representa al promedio del ángulo entre el espín y vector momento.

10. Aplicaciones e importancia del entendimiento del espín

La idea de la existencia del espín, concebida y publicada en 1925 por George Uhlembeck y Samuel Goudsmit bajo la asesoría de Paul Ehrenfest [6], y el entendimiento de las propiedades de éste han dado lugar a relevantes avances científicos y han revolucionado la tecnología de la información [7]. Las aplicaciones de las propiedades del espín son importantes tanto a nivel teórico como práctico y en ámbitos tanto relativistas como en los no relativistas.

En física de altas energías, en los aceleradores modernos, las partículas que se dispersan tienen enormes energías (superiores a 1000 GeV) y su velocidad es muy cercana a la velocidad de la luz. En este caso, por ejemplo, en el análisis de los datos para protones cuyo espín es 1/2, debe tomarse en cuenta el formalismo de espín relativista y el número cuántico, que se usa frecuentamente es la helicidad. Los modelos teóricos, en sus predicciones, también deben tomar en cuenta la invariancia relativista. Un efecto muy interesante aparece en el modelo de partones, donde se considera, que el protón consiste de componentes, partones, que corresponden a los quarks de espín 1/2 y los gluones de espín 1. En las mediciones de la contribución de los partones al espín total del protón aparece "una crisis del espín del protón", que establece, que solamente una parte pequeña del espín total del protón procede del espín de los quarks. Este problema sigue sin resolverse hasta el día de hoy y solamente refleja el importante papel del espín en la física de partículas elementales.

Las enormes energías necesarias para investigar las propiedades de la materia, en pequeñas distancias, crean retos experimentales y teóricos. Desde el punto de vista teórico, tenemos que formular nuestras teorías de manera relativista. Un ejemplo muy relevante es el modelo estándar (ME) [8], el cual es un importante paso, muy exitoso, en este sentido; éste ha sido formulado con base en principios fundamentales asociados a las simetrías imperantes en la naturaleza (invariancia relativista, de norma y renormalizabilidad). Con él se logra la unificación entre la interacción electromagnética y la interacción nuclear-débil causante del decaimiento de partículas tales como el neutrón.

El espín juega también un papel muy importante para procesos en bajas energías. En general, las partículas con espín poseen un momento dipolar magnético que puede ser observado experimentalmente en diversas formas, por ejemplo, por su deflección al pasar por campos magnéticos inhomogéneos en el experimento de Stern-Gerlach o midiendo los campos magnéticos generados por ellas mismas. La primera evidencia experimental directa acerca de la existencia del espín fué, precisamente, el experimento de Stern-Gerlach en 1922. La técnica actual para medir el espín de electrones libres es conocida como la de imagen LEED de un cristal de Wolfram limpio (SPLEED) o por un microscopio electrónico compuesto puramente por lentes electrostáticas y una lámina de oro como muestra.

Las propiedades magnéticas de los materiales, como los ferromagnéticos y paramagnéticos, también tienen su origen en la existencia del espín y el momento magnético de los electrones de estos materiales. Los materiales magnéticos tienen aplicaciones tecnológícas muy amplias y hasta el día de hoy se han encontrado algunas muy novedosas.

Actualmente, la microelectrónica encuentra aplicaciones a ciertas propiedades o efectos derivados de la naturaleza del espín, como es el caso de la magnetorresistencia (MR).

En fin, las aplicaciones a nivel no relativista más directas y mejor establecidas se dan en procesos químicos y físicos a través de su manipulación mediante ondas de radiofrecuencia para la espectroscopia de resonancias magnéticas de nucleos, y electrones; en medicina las asociadas a la densidad de espines de protones para las imágenes de resonancia magnética (MRI); en tecnologías modernas: en la investigación de materiales mediante la magnetorresistividad gigante (MRG) y la del tunelamiento de espines polarizados (SPT) para discos duros.

El acoplamientos espín-órbita conduce al espectro de estructura fina atómica que se usa en los relojes atómicos y en la definición moderna del segundo como unidad de tiempo. Por otro lado, la medición tan precisa del factor-g del electrón ha jugado un papel muy importante en el desarrollo y verificación de la teoría de la electrodinámica cuántica, así como lo jugó en su momento el principio de exclusión de Pauli que hubo explicado la tabla periódica de los elementos químicos y que actualmente está sujeto, de nueva cuenta, a estudio ante un nuevo fenómeno de fractura de electrones, dentro de los materiales, en cuasipartículas denotadas como espinones y chargones (holones). Es decir ante el recientemente observado fenómeno de separación del espín y la carga del electrón [9] que abre nuevas rutas de investigación y aplicaciones.

También se estudia la posibilidad de aprovechar las propiedades del espín para futuras computadoras cuánticas, en las que el espín de un sistema aislado pueda servir como qubit o bit cuántico. Los bits de ordenador (0 y I) podrían ser reemplazados por qubit (algo entre 0 y I), convirtiendo a las computadoras cuánticas en una herramienta mucho más potente. Esto permitiría no sólo renovar los fundamentos de la informática sino superar los procesadores actuales basados en el silicio.

Al uso, presente y futuro, de tecnología que aprovecha propiedades específicas de los espines o que busca la manipulación de espines individuales para ir más allá de las actuales capacidades de la electrónica, se la conoce como espintrónica.

11. Reconocimientos

S.R.J.W. agradece al Dr. P. Kielanowski sus acertadas observaciones y por el apoyo a la Çomisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas"(COFAA) y al sitema EDI del Instituto Politécnico Nacional, al igual que a la SEPI Proyecto 20100034.

Apéndice A

Como ilustración, encontramos en este apéndice los autoestados de helicidad para el caso en el que el movimiento de la partícula se lleve cabo en el plano xy,

$$\vec{p} = |\vec{p}| \left(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta\right),$$

entonces

$$\Lambda = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{|\vec{p}|}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1\cos\theta + \sigma_2\sin\theta & 0 \\ 0 & \sigma_1\cos\theta + \sigma_2\sin\theta \end{pmatrix},$$

explícitamente

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta - i\sin\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta + i\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta - i\sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta + i\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^2 = I\,.$$

Su cuadrado es la matriz identidad y sus eigenvalores son $\lambda \pm 1$.

Los eigenestados de helicidad se obtienen considerando la siguiente ecuación:

$$(\Lambda - \lambda I)\,\Psi = \begin{pmatrix} \sigma_1\cos\theta + \sigma_2\sin\theta - \lambda & 0 \\ 0 & \sigma_1\cos\theta + \sigma_2\sin\theta - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir $\varphi = \chi$, y para $\lambda = \pm 1$ se obtienen los estados de helicidad positiva y negativa $\Psi^{\pm} = \begin{pmatrix} \varphi^{\pm} \\ \varphi^{\pm} \end{pmatrix}$

$$(\sigma_1\cos\theta + \sigma_2\sin\theta\ \mp 1)\,\varphi^{\pm} = 0, \quad i.e. \quad \begin{pmatrix} \mp 1 & \cos\theta - i\sin\theta \\ \cos\theta + i\sin\theta & \mp 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1^{\pm} \\ \varphi_2^{\pm} \end{pmatrix} = 0.$$

Resulta particularmente para el caso de movimiento en el plano (x,y)

$$\varphi^{+} = \begin{pmatrix} \varphi_1^{+} \\ \varphi_2^{+} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \exp(-i\theta) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi^{-} = \begin{pmatrix} \varphi_1^{-} \\ \varphi_2^{-} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\exp(-i\theta) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Apéndice B

Formalmente, el espín está caracterizado por el operador de Pauli-Lubanski W^{α}

$$W^{\alpha} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}M_{\mu\nu}P_{\beta}, \quad P_{\mu} = i\partial_{\mu},$$

$$M_{\mu\nu} = i\left(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$$

El invariante $W^{\alpha}W_{\alpha}$ que conmuta con todos los generadores del grupo de Poincaré, incluye al espín s para partículas masivas.

$$W^{\alpha}W_{\alpha} = W^2 = m^2 s\,(s+1)\,.$$

El estado cuántico de una partícula masiva se describe en términos de la masa y el espín s y éste determina el comportamiento estadístico de la partícula. En este contexto, el operador helicidad se define como

$$\Lambda = W^0/\,|\mathbf{P}| = \mathbf{J}\cdot\mathbf{P}/\,|\mathbf{P}|\,.$$

Para partículas sin masa, para las cuales $P_{\mu}P^{\mu} = 0$, el operador Λ conmuta con todos los generadores del grupo de Poincare y $\Lambda \to \lambda = \pm s$

Explícitamente

$$P_{\mu} = i\partial_{\mu}, \quad \mathbf{J} = -i\mathbf{x}\times\nabla + \frac{1}{2}\sigma,$$

$$\mathbf{K} = -i\left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial t} + t\nabla\right) + \frac{1}{2}\alpha$$

donde operador $\mathbf{J}$ es el momento angular y $\mathbf{K}$ es el operador de empuje (boost) [4].

1. P.A.M. Dirac, *Proc. R. Soc.* **A117** (1928) 610.
2. J.D. Bjorken y S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill 1965).
3. W. Greiner y B. Müller, *Gauge Theory of Weak Interactions* 2nd ed (Springer-Verlag 2000) p16.
4. L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* 2nd ed (Cambrigde University Press 2001).
5. W. Greiner y J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics* 3rd ed (Springer-Verlag 2003) p164.
6. G.E. Uhlenbeck y S. Goudsmit, *Naturwissenschaften* **47** (1925) 953.
7. J.S. Moodera *et al.*, *Physics Today* **63** (2010) 46.
8. http://en.wikipedia.org/wiki/Standard Model.
9. C. Xu y S. Sachdev, *Physical Review Letters* **105** (2010) 057201.